技術者のための高等数学 2

E. クライツィグ著

近藤次郎・堀 素夫 監訳

堀 素夫 訳

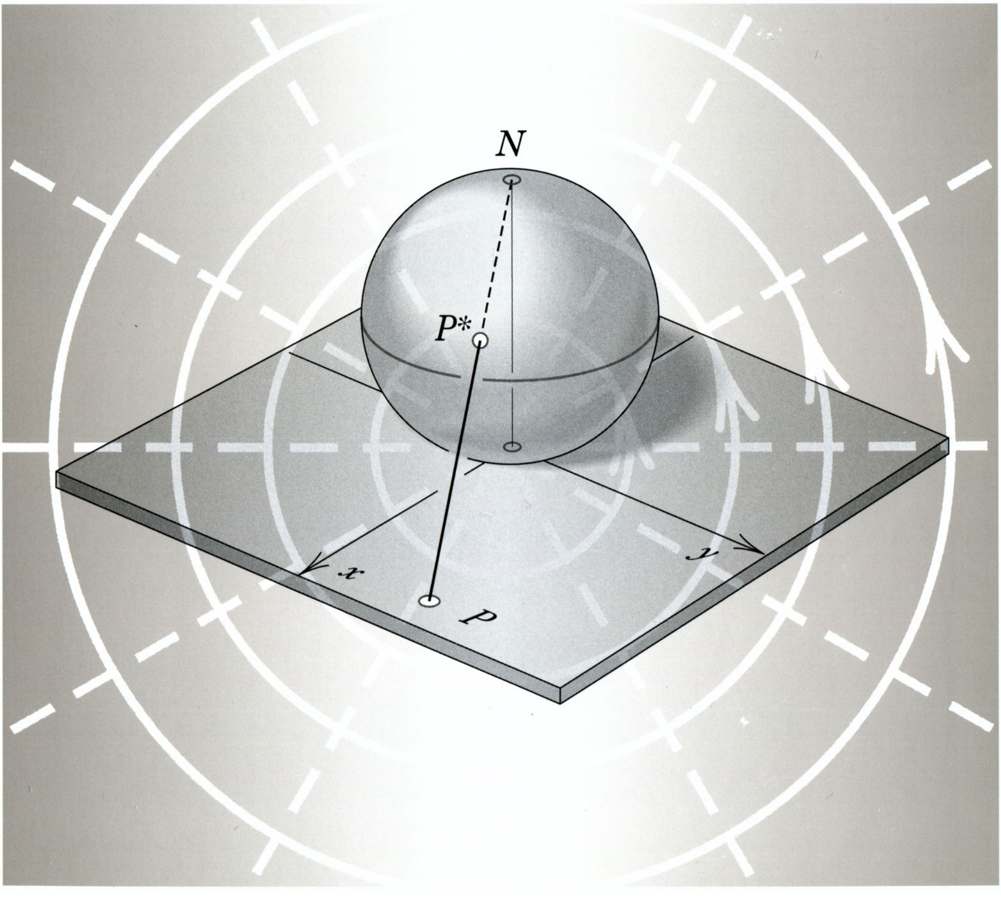
培風館

線形代数とベクトル解析

（原書第8版）

Advanced Engineering Mathematics

Eighth Edition



技術者のための高等数学

2

近藤次郎・堀 素夫 監訳

Advanced Engineering Mathematics

Eighth Edition

線形代数とベクトル解析

（原書第8版）

E. クライツィグ著

堀 素夫 訳

培風館

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

Eighth Edition

by

Erwin Kreyszig

訳者序文

本書は Erwin Kreyszig 教授の著書 "*Advanced Engineering Mathematics*" 第8版の全訳である．原著第2版について第5版の旧訳が世に出たのは1987年のことであった．これらの旧訳は幸い読者の間で比較的好評をもって迎えられ，今日にいたるまで毎年増刷を重ねてきた．ところが，最近刊行された原著第8版はかなり大幅に改訂増補され，質量ともに旧版よりもはるかに充実した著作となっている．そこで，近藤次郎教授と共訳者諸氏の協力を得て全面的な改訳を行い，ふたたび本書を世に送ることになったのである．

わが国では，理工系大学の第1学年ないし一般教育課程向きの数学教科書は非常に多く出版されているにもかかわらず，第2学年以降の専門課程用の数学教科書はきわめて少ない．もちろん，各専門学科によって数学への要求が異なるため，どの学科にとっても好都合な教科書が作りにくいこともその理由であろう．実際，応用を目標とする理工科系学生が共通に修得すべき数学の内容や範囲を決定することは必ずしも容易ではない．そのうえ，応用数学教育における指導原則の問題，すなわち，理論，応用，あるいは数学的な考え方のどの面に重点をおいて教えるのかという問題もある．教授項目の点でもまた指導原則の点でもバランスのよいすぐれた教科書を作ることは至難のわざである．

Kreyszig 教授のこの著作は，同教授の長年の研究教育経験を生かして，いろいろな意味で実に見事なバランスのとれた "工科の数学" になっている．もっとも感心させられるのは，数学的な考え方を重視し，理論と応用の結びつきに対する明快な見通しと解説を与えていることである．数学者の書いた書物はとかく理論だおれとなり，具体性や直観性を欠くきらいがある．一方，実務家の著した書物は形式的な応用や計算のみに走りすぎ，その基礎にある数学的な考え方を忘れがちである．しかし，本書はこれらの欠陥を完全に克服しており，理論と応用のいずれからみてもすぐれた教科書といえよう．

原著第8版は1000ページを超える膨大な労作であって，著者序文で示されたA, B, C, D, E, F, Gの7部門から構成されている．この訳本では，便宜上A, C部門の内容を一部入れかえてつぎの7巻の分冊とした．

第1巻　常微分方程式 (原著A : 1–4章)
第2巻　線形代数とベクトル解析 (原著B : 6–9章)
第3巻　フーリエ解析と偏微分方程式
　　　(原著A : 5章，原著C : 10, 11章)
第4巻　複素関数論 (原著D : 12–16章)
第5巻　数値解析 (原著E : 17–19章)
第6巻　最適化とグラフ理論 (原著F : 20, 21章)
第7巻　確率と統計 (原著G : 22, 23章)

上の7分冊はそれぞれ独立な課程の教科書として活用されることを期待している．

翻訳にあたってとくに意を用いた点をあげておこう．

1. なるべく原文に忠実に訳出することに努めたが，日本語の文章として意味が通じやすいようにかなり意訳したところもある．

2. 原著の注のほかにいくつかの訳注をつけた．

3. 訳語は原則として学術用語集および岩波数学辞典 第4版によったが，中にはより適切と思われる訳語を用いた場合もある．とくに，コンピュータや情報科学関連の用語を現代化し，片仮名の慣用語を増やした．

共訳者の分担はつぎのとおりである．

第1巻　北原和夫，堀　素夫
第2巻　堀　素夫
第3巻　阿部寛治
第4巻　丹生慶四郎
第5巻　田村義保
第6巻　田村義保
第7巻　田栗正章
監　訳　近藤次郎，堀　素夫

終わりに，訳者らのわがままな注文を快く聞き入れて，出版までのいろいろなお世話をしてくださった培風館編集部の方々に厚く御礼申し上げたい．

訳者を代表して
堀　素夫

著 者 序 文

本書の目的

本書は，工学，物理学，数学，コンピュータ科学などを専攻する学生のために，実際問題との関連においてもっとも重要と思われる数学の諸領域を，現代的な見地から解説した入門書である．

応用分野で必要とされる数学の内容と性格は現在でも急激に変化している．行列を中心とする線形代数やコンピュータのための数値方法はますます重要性を増している．統計学やグラフ理論も顕著な役割を果たしつつある．実解析(微分方程式)と複素解析はいまなお必要不可欠である．したがって，本書における主題は独立な 7 部門に分類され，つぎのように配列されている．

A．常微分方程式

基礎事項 (1–3 章)
級数解と特殊関数 (4 章)
ラプラス変換 (5 章)

B．線形代数とベクトル解析

ベクトル，行列，固有値 (6, 7 章)
ベクトルの微分法 (8 章)
ベクトルの積分法 (9 章)

C．フーリエ解析と偏微分方程式

フーリエ解析 (10 章)
偏微分方程式 (11 章)

D．複素解析

基礎事項 (12–15 章)
ポテンシャル論 (16 章)

`http://www.wiley.com/college/mat/kreyszig154962/` 参照．

E. 数値解析

数値解析一般 (17 章)
線形代数の数値的方法 (18 章)
微分方程式の数値解法 (19 章)

F. 最適化とグラフ理論

線形計画法 (20 章)
グラフと組合せ最適化 (21 章)

G. 確率と統計

確率論 (22 章)
数理統計学 (23 章)

最後につぎの付録が追加されている.

参考文献 (付録 1)
奇数番号の問題の解答 (付録 2)
補足事項 (付録 3)
追加証明 (付録 4)
数　　表 (付録 5)

本書はいままでも数理工学の発展の道を拓くことにいささか貢献してきた. さらに, ここで列挙した各分野への現代的なアプローチに, 根本的な変化をもたらす (とくにコンピュータ関連の) 新しいアイディアが加われば, 学生たちの現在と将来への準備として役だつだろう. 多くの手法はすぐ時代遅れになってしまう. 実例をあげると, 安定性, 誤差評価, アルゴリズムの構成問題などがある. その動向は供給と需要のかね合いによって決まる. 供給とは新しい強力な数学的方法, 計算技法と大容量コンピュータを提供することである. また需要とは, 非常に精巧なシステムや生産プロセス, (たとえば宇宙旅行などの) 極限的な物理条件, 特異な物性をもつ材料 (プラスチック, 合金, 超伝導物質など), あるいはコンピュータ・グラフィックス, ロボティックスなどの新分野におけるまったく新しい課題から得られる大規模で複雑な問題を解決することを意味する.

このような一般的な傾向は明らかなようにみえるが, 詳細を予見することは難しい. そのため, 工学的問題を数理的に解決する 3 段階のすべてにおいて, 基本原理, 方法, 結果に関する深い知識と, 工業数学の本質に関する確かな認識を学生に与えなければならない. その 3 段階はつぎのようにまとめられる.

モデル化　与えられた物理的，工学的な情報やデータを数学的モデル (微分方程式，連立方程式など) に翻訳すること．

数学的解法　適当な数学的方法を選択適用することによって解を求め，さらにコンピュータ上で数値計算を行うこと．これが本書の主題である．

物理的解釈　数学的な解の意味をもとの問題の物理的な言葉で理解すること．

あまり使われない細かい問題で学生に過大な負担を課すのは無意味と思われる．そのかわりに，学生に数学的思考に習熟させ，工学的問題に数学的方法を適用する必要性を認識させ，数学が比較的少数の基本概念と強力な統一原理に基づく体系的科学であることを理解させ，さらに理論，計算，実験の間の相関関係を確実に把握させることが重要である．

このような急速な発展を考慮して，この新版 (第 8 版) では多くの変更と新しい試みを実施した．とくに，多数の項目をより詳細で丁寧な形に書きかえ，理解しやすいように配慮した．また，応用，アルゴリズム，実施例，理論のバランスをよくするよう努めた．

第 8 版におけるおもな改変

1 問題の変更

新しい問題は定性的な方法と応用に重点をおいている．すなわち，形式的な計算は多少減らして，数学的思考と理解を必要とする本質的な問題を選んだ．そのかわりに，単なる定量的な計算には後述の CAS (コンピュータ代数システム：Computer Algebraic System) を慣用する．

2 プロジェクト

現代の工学技術は協同作業である．これに備えた特別研究課題 “協同プロジェクト” は学生に役だつであろう．(これは比較的簡単であり，忙しい学生の時間割に向いている.)　“論文プロジェクト” は研究を計画実行し，すぐれた報告や論文を書く助けとなろう．“CAS プロジェクト” および “CAS 問題” は学生がコンピュータ (とプログラム電卓) を利用するための手引きを与える．しかし，CAS プロジェクトは決して強制するものではない．本書はコンピュータを使っても使わなくても学ぶことができるからである．

3 数値解析の現代化

コンピュータ関連の数値解析の記述を現代化した．

教科課程への示唆：連続した 4 学期課程

本書の内容を順を追って講義すれば，週 3–5 時間の 4 学期課程に適したものになろう．すなわち，

第 1 学期　常微分方程式 (1–4 章または 1–5 章)
第 2 学期　線形代数とベクトル解析 (6–9 章)
第 3 学期　複素解析 (12–16 章)
第 4 学期　数値解析 (17–19 章)

ほかの章は後の 1 学期課程で扱う．もちろん講義の順序は変えてもよい．たとえば，数値解析を複素解析よりも前に講義することもできる．

教科課程への示唆：独立した 1 学期課程

本書はまた週 3 時間のいろいろな独立した 1 学期課程にも適している．たとえば，

常微分方程式入門 (1, 2 章)
ラプラス変換 (5 章)
ベクトル代数とベクトル解析 (8, 9 章)
行列と連立 1 次方程式 (6, 7 章)
フーリエ級数と偏微分方程式 (10, 11 章，19.4–19.7 節)
複素解析入門 (12–15 章)
数値解析 (17, 19 章)
数値線形代数 (18 章)
最適化 (20, 21 章)
グラフと組合せ最適化 (21 章)
確率と統計 (22, 23 章)

第 8 版の一般的特徴

この第 8 版では，題材の選択とその配列や表現は，過去から現在までの著者の教育，研究，相談経験などに基づいて注意深く行われた．本書のおもな特徴をまとめるとつぎのようになる．

本書はとくに明記されたごく少数の例外的な箇所を除いて**自己完結的**である．その例外的な場合には，証明が現在のタイプの書物のレベルを超えるため，参考文献を引用するだけにとどめた．困難を隠したり極端に単純化したりすることは学生にとって真の助けにはならないからである．

本書の記述は詳細であり，ほかの本をたびたび参照して読者をいらいらさせないよう配慮している．

例題は教えやすいように単純なものを選んだ．単純な例題のほうがわかりやすくてためになるのに複雑な例題を選ぶ必要はないからである．

学生が学術雑誌の論文や専門書を読みほかの数学関連課程を学ぶのを助けるために，記号も現代的で標準的なものを用いた．

各章の内容はかなり独立であって，それぞれ別の課目として教えやすいようになっている．

コンピュータの利用とコンピュータ代数システム (CAS)

コンピュータ (パソコン) およびプログラム電卓の利用は，推奨はされるが強制はされない．

コンピュータ代数システム (CAS : Computer Algebraic System) は，本書の約 4000 の問題の多くを解くのに役だつ．このすばらしく強力で万能のシステムを賢明に活用すれば，学生に新たな刺激と見識を与え，授業，個別指導，実習，家庭などにおける勉学，ひいては卒業後の将来の職務への準備を助けることになろう．

これが問題集の補強のために CAS プロジェクトを加えた理由である．ただし，CAS プロジェクトを除外しても完全な問題集として通用することに変わりはない．

同様に，本書はコンピュータを用いずに学ぶこともできる．

ソフトウェアのリストは数値解析の章の前に記載されている．

謝　辞

いままで教えてくださった諸先生，同僚諸氏，学生諸君には，本書とくにこの第 8 版の執筆にあたって，直接的または間接的に多くの助言と助力をいただいた．原稿のコピーが私の担当するクラスに配布され，改訂のための示唆つきで返されてきた．工学者や数学者との討論 (および紙上でのコメント交換) は私にとって大きな助けとなった．とくに，S. L. Campbell, J. T. Cargo, R. Carr, P. L. Chambré, V. F. Connolly, J. Delany, J. W. Dettman, D. Dicker, L. D. Drager, D. Ellis, W. Fox, R. B. Guenther, J. L. Handley, V. W. Howe, W. N. Huff, J. Keener, V. Komkow, H. Kuhn, G. Lamb, H. B. Mann, I. Marx, K. Millet, J. D. Moore, W. D. Munroe, A. Nadim, J. N. Ong, Jr., P. J. Pritchard,

W. O. Ray, J. T. Scheick, L. F. Shampine, H. A. Smith, J. Todd, H. Unz, A. L. Villone, H. J. Weiss, A. Wilansky, C. H. Wilcox, H. Ya Fan, L. Zia, A. D. Ziebur のアメリカにおける教授の方々，カナダの H. S. M. Coxeter, E. J. Norminton, R. Vaillancourt 各教授と H. Kreyszig 氏 (コンピュータの専門技術で 17–19 章に貢献)，さらにヨーロッパにおける H. Florian, H. Unger, H. Wielandt の諸教授があげられる．ここで私の謝意を適切に表すことはできないほどである．

原稿を細部にわたってチェックし数多い訂正を行われた M. Kracht 博士のご尽力に深く感謝する．

原稿の準備から刊行にいたるまでたえず助けていただいた編集者 Barbara Holland さんに心からお礼を申し上げる．

終わりに，John Wiley & Sons 社と GGS 情報サービスの皆さんにも，この版の刊行にあたっての効果的協力とお世話に感謝したい．

多くの読者の方々からの示唆は本版を書くのに大変役だった．さらによくしていくためのご意見やご批判をいただければ幸いである．

Erwin Kreyszig

目　次

線形代数とベクトル解析

Linear Algebra, Vector Calculus

過去数十年間の工業数学の発展に寄与したおもな要因としては，まずコンピュータの広範囲の工学的問題への応用があり，つぎに大規模システムの解析などにおける線形代数や線形解析の利用があげられる．

はじめの 2 章では，**線形代数**，すなわち主として連立 1 次方程式，固有値問題，1 次変換などに関連したベクトルと行列の理論およびその応用を扱う．

線形代数における**数値的方法**は第 5 巻 2 章で論じるが，数値解析に関するほかの章とは独立な記述になっている．したがって，1, 2 章を読んだあとすぐに第 5 巻 2.1–2.5 節，2.6–2.9 節を学ぶことができる．

終わりの 2 章では**線形解析**すなわち**ベクトル解析**について述べる．3 章の主題はベクトルの微分法であって，ベクトル場，曲線，速度，方向微分，勾配，発散，回転を含んでいる．4 章の範囲はベクトルの積分法であって，線積分，面積分，3 重積分の説明からはじまり，グリーン，ガウス，ストークスの積分定理に及んでいる．

1

線形代数：行列，ベクトル，行列式，連立 1 次方程式

線形代数は連立 1 次方程式，1 次変換および固有値問題の理論と応用を含んでいる．これらの理論は，たとえば電気回路，力学構造，曲線のあてはめなどの最適化問題，連立微分方程式，確率統計過程などに関連して現れる．

線形代数では，ベクトルと行列 (1.1 節)，さらに行列式 (1.6 節) を系統的に利用する．そのためとくに行列の性質は線形代数の中心的課題として学ぶ必要がある．

行列は数を長方形状に配列したものである．行列はたとえば方程式の係数の配置など多くの問題で現れる．行列 (およびベクトル) が有用なのは，多くの数の配列を単一の対象と考え，ただ 1 つの記号で表し，簡潔な形で計算することができるからである．こうして得られる "数学的速記法" は非常にエレガントかつ有力で，いろいろな実際問題に適している．

1.1 節では行列とベクトルの定義と基本概念を与え，つぎに行列に関する 2 種類の代数演算，すなわち和とスカラー倍について論じる．1.2 節では行列の積を定義し，さらに特殊な行列および行列やベクトルの転置を扱う．

後の節のおもな対象は**連立 1 次方程式**である．ガウス消去法 (1.3 節)，階数の重要な役割 (1.4, 1.5, 1.7 節)，特別なベクトル空間 (1.4 節)，解の存在と一意性の問題 (1.5 節)，行列式とその連立 1 次方程式への利用 (クラメールの公式，1.6 節)，逆行列とそのガウス・ジョルダン法による計算 (1.7 節) の順に説明される．

最後の 1.8 節ではより抽象的な一般のベクトル空間，内積空間および 1 次変換について述べる．

実際問題への応用は章全体でとりあげられている．

第 5 巻 2.1–2.5 節の線形代数における**数値的方法**は，本章の対応する部分を読んだあとですぐに学ぶことができる．

行列の固有値問題は 2 章で扱う．

本章を学ぶための予備知識：なし．

短縮コースでは省略してもよい節：1.5, 1.8 節．

参考書：付録 1.

問題の解答：付録 2.

1.1 基本概念，行列の和，スカラー倍

本章のはじめの 2 節では行列とベクトル代数の基本概念と算法を導入する．連立 1 次方程式への応用はおもに 1.3 節からはじまる．

行列は数 (または関数) を長方形状に配列して括弧で囲んだものである．その数 (関数) を行列の**成分**または**要素**という．たとえば，

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 5 & -32 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [a_1 \quad a_2 \quad a_3], \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^x & 3x \\ e^{2x} & x^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

は行列である．最初の行列は 2 つの “行”(横の線) と 3 つの “列”(縦の線) をもつ．2 番目の行列は 1 列だけからなり，列ベクトルとよばれる．3 番目の行列はただ 1 行だけをもつ行ベクトルである．最後の 2 つの行列は同数 (この場合は 2 個) の行と列をもつ正方行列である．

本章の今後の説明でわかるように，行列は応用が広く実用的である．まず典型的な 2 つの実例を考えてみよう．

例 1 連立 1 次方程式の係数行列 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 0, \\ 3x + 4z &= 0 \end{aligned}$$

に対して，未知数 x, y, z の係数を成分とする行列，すなわち係数行列を $\boldsymbol{A}$ と書けば，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

となる．係数行列 $\boldsymbol{A}$ における成分の位置はもとの連立 1 次方程式における係数の位置に対応している．

未知数の記号はあまり本質的ではない．x, y, z のかわりに x_1, x_2, x_3 または別の文字を使うこともできる．連立方程式の係数 (いまの場合右辺の数字 0, 0 も含めて) だけで解のすべての性質が決まるので，係数行列 $\boldsymbol{A}$ が本質的なのである．くわしくは 1.3 節以降で述べる． ◀

例 2 売上げ数の行列 ある会社の 10 店舗で 3 種類の製品 I, II, III を販売している．ある店の曜日別の 3 製品の売上げ数を行列の形で表しておく．

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{A} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{月} & \text{火} & \text{水} & \text{木} & \text{金} & \text{土} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & 33 & 81 & 0 & 21 & 47 \\ 0 & 12 & 78 & 50 & 50 & 96 \\ 10 & 0 & 0 & 27 & 43 & 78 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} .$$

この種の行列を店ごとにつくり，対応する成分を加え合わせると，10 店全体の総売上げ数を表す行列が得られる．ほかにも行列が役だちそうなデータを考えだせるだろうか．たとえば，輸送や貯蔵の問題とか，電話の呼出し数や道路網中の距離の記録に関連したデータはどうだろうか． ◀

一般記号と基本概念

行列は $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ などの大文字の太文字を用いて，あるいは成分の一般形を括弧で囲んで $\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,]$ のように表される．m 個の行と n 個の列をもつ行列は $m \times n$ **行列**または (m, n) **型行列**とよばれる．したがって $m \times n$ 行列は

$$\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{2})$$

のように書ける．(1) の行列の型は 2×3, 2×1, 1×3, 2×2, 2×2 である．

行列の成分を表す **2 重添数記号**においては，第 1 の添数は**行**の番号を，第 2 の添数は**列**の番号を示している．それで a_{23} は 2 行目 3 列目の成分を与える．

$m = n$ のとき，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ **正方行列**とよばれる．正方行列の成分 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ からなる対角線を**主対角線**，その各成分を**対角成分**という．行列 (1) の最後の 2 つの行列は正方行列である．主対角線はそれぞれ a, d および e^x, x^2 となる．正方行列はとくに重要である．

正方行列でない行列を**長方行列** (**矩形行列**) という．

ベ ク ト ル

ベクトルとはただ 1 行か 1 列だけをもつ行列のことである．1 行だけからなる行列を**行ベクトル**といい，1 列だけからなる行列を**列ベクトル**という．これらの行列の成分をベクトルの**成分**とよぶ．ベクトルは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ などの小文字の太文字を用いて，あるいは成分の一般形を括弧で囲んで $\boldsymbol{a} = [\,a_j\,]$ のように表される．

例 3　行ベクトル，列ベクトル，ベクトルの転置　行ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = [\,a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\,], \quad \text{たとえば} \quad \boldsymbol{a} = [\,5 \quad 3 \quad \tfrac{1}{2}\,]$$

のように書ける．列ベクトルは

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \text{たとえば} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

のように書ける．行ベクトルと列ベクトルは転置によって互いに入れかわる．行と列を交換する転置という操作を ^{T} で表せば，$\boldsymbol{a}^T$ は列ベクトルで $\boldsymbol{b}^T$ は行ベクトルになる．すなわち，

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}^T = [4 \quad 0 \quad -7].$$

行ベクトルと列ベクトルのどちらが実際的かは目的によって決まる．本書ではなるべく列ベクトルを使うことにする．◀

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の行，列自体を $\boldsymbol{A}$ の行ベクトル，列ベクトルとよぶこともあるが，そのために混乱を起こさないように注意したい．

転置行列

任意の行列に対する**転置**を定義しよう．式 (2) に与えられた $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ の**転置行列** $\boldsymbol{A}^T$ とは，$\boldsymbol{A}$ の第 1 行を第 1 列として，$\boldsymbol{A}$ の第 2 行を第 2 列として，一般に $\boldsymbol{A}$ の第 j 行を第 j 列としてもつ $n \times m$ 行列のことである．それゆえ式 (2) の $\boldsymbol{A}$ の転置行列はつぎのようになる．

$$\boldsymbol{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

例 4　行列の転置

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{のとき，} \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad ◀$$

対称行列は転置しても変わらない正方行列であり，**交代行列**あるいは**歪対称行列**は転置すると符号が変わる正方行列である．すなわち，

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}.$$

対称行列　　交代行列

ただし，$-\boldsymbol{A} = [-a_{jk}]$ は $\boldsymbol{A}$ の各成分 a_{jk} を $-a_{jk}$ (たとえば 4 を -4，-3 を 3 など) でおきかえて得られる．対称行列と交代行列は非常に重要な概念で今後もしばしば用いられる．

行列の相等

行列やベクトルが本当に役だつのは数と同様に容易に計算することができるからである．ここでは，行列の和とスカラー倍という 2 種類の演算を導入する

が，これらの算法は実際上の応用から考えだされたものである．行列と行列の積については次節で述べる．

まずベクトルが相等しいことの定義からはじめよう．

定義　**行列の相等**　2 つの行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$，$\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ が相等しいのは，両者の型 $m \times n$ が同じで，しかも対応するすべての成分が一致し $a_{jk} = b_{jk}$ $(j = 1, 2, \cdots, m,\ k = 1, 2, \cdots, n)$ がなりたつ場合である．

例 5　**行列の相等**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

は，$a_{11} = 4$，$a_{12} = 0$，$a_{21} = 3$，$a_{22} = -1$ と同値である．同じ型の行列で異なる (等しくない) 行列の実例をあげると，

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{4} \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{4} \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

例 4 の $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T$ は同型でさえないので等しくはない．例 3 の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}^T$ や $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}^T$ についても同様である．◀

行 列 の 和

定義　**行列の和**　行列の加法は同型の行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ と $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ の間にだけ定義される．和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ は対応する成分を加えることによって得られる．型の異なる行列は加えることができない．

特別な場合として，同数の成分をもつ行ベクトルや列ベクトルの和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ も対応する成分を加えれば得られる．

例 6　**行列の和とベクトルの和**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ のとき，} \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

この $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T$ は加えることができない．この $\boldsymbol{B}$ と例 5 の $\boldsymbol{B}$ も加えられない．$\boldsymbol{a} = [5\ \ 7\ \ 2]$，$\boldsymbol{b} = [-6\ \ 2\ \ 0]$ ならば，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [-1\ \ 9\ \ 2]$ である．◀

行列の和の簡単な応用は例 2 に示されているが，このあとにも数多くの応用が出てくる．

スカラー倍

定義　**スカラー倍 (行列と数の積)**　$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ とスカラー c (数 c) の積 $c\boldsymbol{A}$ とは，$\boldsymbol{A}$ の各成分に c を掛けて得られる $m \times n$ 行列 $[c\, a_{jk}]$ の

ことである．

ここで $(-1)\boldsymbol{A}$ を単に $-\boldsymbol{A}$ と書き，$\boldsymbol{A}$ の**負行列**とよぶ．同様に $(-k)\boldsymbol{A}$ を $-k\boldsymbol{A}$ と書く．また，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ を $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ と書き，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**差** ($\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ型でなければならない) とよぶ．

例 7　スカラー倍

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2.7 & -1.8\\ 0 & 0.9\\ 9.0 & -4.5\end{bmatrix}$$ のとき，

$$-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2.7 & 1.8\\ 0 & -0.9\\ -9.0 & 4.5\end{bmatrix},\qquad \frac{10}{9}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\\ 10 & -5\end{bmatrix},\qquad 0\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$ ◀

行列の加法やスカラー乗法に対しても，ふつうの数の場合と同様な演算法則が存在する．実際，$m\times n$ 行列の和については

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}, \tag{4a}$$

$$(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})+\boldsymbol{W}=\boldsymbol{U}+(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})\qquad (\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}\text{と書ける}), \tag{4b}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}, \tag{4c}$$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0} \tag{4d}$$

がなりたつ．また行列のスカラー倍については

$$c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}, \tag{5a}$$

$$(c+k)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{A}, \tag{5b}$$

$$c(k\boldsymbol{A})=(ck)\boldsymbol{A}\qquad (ck\boldsymbol{A}\text{と書ける}), \tag{5c}$$

$$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \tag{5d}$$

がなりたつ．ただし，式 (4c), (4d) の $\boldsymbol{0}$ は (型 $m\times n$ の) **零行列**，すなわちすべての成分が 0 である行列を意味する．

容易に示されるように，和の転置行列は

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T \tag{6}$$

として与えられ，スカラー倍の転置行列は

$$(c\boldsymbol{A})^T=c\boldsymbol{A}^T \tag{7}$$

のように表される．

ほかの重要な代数演算である行列と行列との乗法は次節で扱う．これで応用のための準備が整うことになる．

❖❖❖❖❖　問題 1.1　❖❖❖❖❖

行列の和とスカラー倍

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 0 & 8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -4\\ -3 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

としてつぎの行列を求めよ．行列が定義できない場合にはその理由を述べよ．

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$
2. $4\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{B},\ 4(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),\ 8\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}$
3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C},\ (\boldsymbol{C}^T)^T,\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^T$
4. $6\boldsymbol{C}-5\boldsymbol{C},\ 3\boldsymbol{C}^T+2\boldsymbol{D}^T,\ \boldsymbol{C}-2\boldsymbol{C}^T$
5. $5\boldsymbol{D}-3\boldsymbol{C},\ 5\boldsymbol{D}^T-3\boldsymbol{C}^T$
6. $\boldsymbol{A}+0\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{C}-0\boldsymbol{A},\ 0\boldsymbol{B}$
7. $(\boldsymbol{B}^T-\boldsymbol{A}^T)^T,\ \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T$
8. $6(\boldsymbol{C}^T+3\boldsymbol{D}^T)^T,\ 6\boldsymbol{C}+18\boldsymbol{D}$

ベクトルの和とスカラー倍　ベクトル

$$\boldsymbol{a}=[3\quad 0\quad 4],\quad \boldsymbol{b}=[-1\quad 8\quad 2],\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}9\\ 5\\ 7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 6\end{bmatrix}$$

に対してつぎのベクトルを求めよ．ベクトルが定義できない場合にはその理由を述べよ．

9. $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b},\ 7\boldsymbol{a}^T-5\boldsymbol{b}^T$
10. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}^T,\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$
11. $3(\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{d}),\ 3\boldsymbol{c}-12\boldsymbol{d}$
12. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}^T-\boldsymbol{d}^T,\ 12(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}^T)$
13. $5(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{d}),\ 10\boldsymbol{d}-5\boldsymbol{c}$
14. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}^T,\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^T$
15. $6\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{a}^T)^T-\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{a}$
16. $(3\boldsymbol{c})^T-3\boldsymbol{c}^T,\ 4\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{b}+4\boldsymbol{d}^T$

17. **(行列の和，スカラー倍)**　一般の 2×3 行列，スカラー c, k に対して式 (4)，(5) を証明せよ．

18. **(転置行列)**　一般の 4×3 行列，スカラー c に対して式 (6)，(7) を証明せよ．

19. **[協同プロジェクト]**　対称行列と交代行列はそれぞれ $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^T=-\boldsymbol{B}$ によって定義される正方行列である．この種の行列は応用分野でしばしば現れるので，ここでいくつかの重要な性質を学んでおこう．

(a)　任意の j, k に対して $a_{kj}=a_{jk}$ のとき，またそのときに限り $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ が対称行列となることを示せ．つぎに，任意の j, k に対して $b_{kj}=-b_{jk}$，とくに $b_{jj}=0$ のとき，またそのときに限り $\boldsymbol{B}=[b_{jk}]$ が交代行列となることを示せ．

(b)　すべての正方行列 $\boldsymbol{C}$ に対して，$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^T$ が対称行列で $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^T$ が交代行列であることを示せ．したがって，正方行列 $\boldsymbol{C}$ は対称行列 $\boldsymbol{S}$ と交代行列 $\boldsymbol{T}$ の和として $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}$ と書ける．$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ を求めよ．問題 1–8 における行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ をこの形で表せ．

(c)　同じ型の行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots, \boldsymbol{M}$ の 1 次結合は，$a, b, \cdots, m$ を任意のスカラーとして

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}+\cdots+m\boldsymbol{M} \tag{8}$$

で与えられる．個々の行列が対称行列ならば式 (8) もまた対称行列となることを示せ．同様に交代行列の 1 次結合も交代行列であることを示せ．

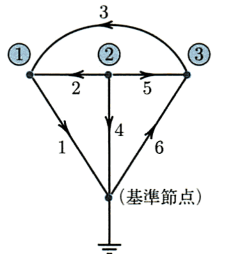
20. **[協同プロジェクト]**　**回路網行列**　行列はいろいろな工学分野で広く応用されている．たとえば，電気回路網，道路網，生産プロセスなどにおける接続関係は行列によって表現することができる．

(a)　**節点接続行列**　図 1.1 は 6 つの枝路 (連結線) と 4 つの節点 (2 つ以上の枝路の交

わる点) をもつ電気回路網を表す．節点のうちの 1 つは基準節点 (接地されている電圧 0 の節点) であるが，それ以外の節点には番号をつける．枝路に対しても番号をつけ，向きを与えておく．番号や向きのつけ方は任意でよい．この回路網はつぎのような行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ によって記述される．

$$a_{jk} = \begin{cases} +1 & (\text{枝 } k \text{ が点}ⓙ\text{から出るとき}), \\ -1 & (\text{枝 } k \text{ が点}ⓙ\text{に入るとき}), \\ 0 & (\text{枝 } k \text{ が点}ⓙ\text{を通らないとき}). \end{cases}$$

$\boldsymbol{A}$ は回路網の**節点接続行列**とよばれる．図 1.1 の回路網に対しては $\boldsymbol{A}$ が図の右に与えられた形になることを確かめよ．



枝路	1	2	3	4	5	6
節点 ①	1	−1	−1	0	0	0
節点 ②	0	1	0	1	1	0
節点 ③	0	0	1	0	−1	−1

図 1.1　協同プロジェクト 20 (a) の回路網と節点接続行列

(b)　図 1.2 の回路網の節点接続行列を求めよ．

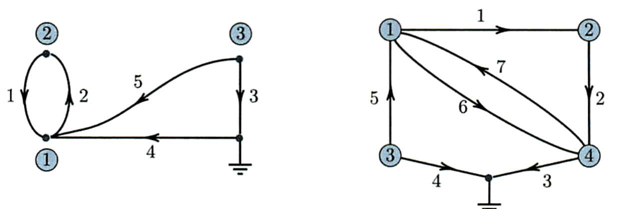


図 1.2　協同プロジェクト 20 (b) の電気回路網

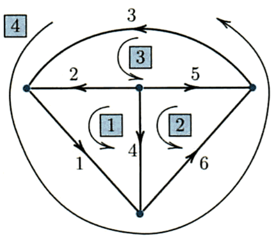
(c)　つぎの節点接続行列に対応する 3 つの回路網を図示せよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d)　**メッシュ接続行列**　回路網はつぎのような**メッシュ接続行列** $\boldsymbol{M} = [m_{jk}]$ を用いて特徴づけることもできる．

$$m_{jk} = \begin{cases} +1 & (\text{枝 } k \text{ とメッシュ } \boxed{j} \text{ が同じ向きのとき}), \\ -1 & (\text{枝 } k \text{ とメッシュ } \boxed{j} \text{ が逆向きのとき}), \\ 0 & (\text{枝 } k \text{ がメッシュ } \boxed{j} \text{ に含まれないとき}). \end{cases}$$

メッシュとはその内部 (または外部) に枝路を含まない閉路のことである．メッシュには適当に番号をつけ向きを与える．メッシュ接続行列 $\boldsymbol{M}$ の第 j 行は番号 j のメッシュに対応し，第 k 列は番号 k の枝路に対応する．図 1.3 の回路網に対しては，行列 $\boldsymbol{M}$ が図の右に与えられた形になることを確かめよ．



$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

図 1.3　協同プロジェクト 20 (d) の回路網とメッシュ接続行列 $\boldsymbol{M}$

1.2 行列の積

まだ定義していない最後の代数演算は**行列の積**の演算すなわち行列と行列の掛け算である．行列の和は対応する成分を加え合わせて得られた．積についても同じことがいえるのか．答えは否である．これから述べる積の定義は技巧的すぎると感じられるかもしれない．しかし，これは 1 次変換に関連して行列を利用することから自然に考えだされたものである．

定義　行列と行列との積　$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ と $r \times p$ 行列 $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ の (この順序での) 積 $\boldsymbol{AB}$ は，$r = n$ すなわち

$$\text{第 2 の行列}\boldsymbol{B}\text{の行数} = \text{第 1 の行列}\boldsymbol{A}\text{の列数}$$

のときに限って定義される．この場合，積 $\boldsymbol{AB}$ は成分が

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \cdots, m, \\ k = 1, \cdots, p \end{pmatrix} \tag{1}$$

で表される $m \times p$ 行列 $\boldsymbol{C} = [c_{jk}]$ として定義される．いいかえると，c_{jk} を求めるためには，$\boldsymbol{A}$ の j 行目の各成分に $\boldsymbol{B}$ の k 列目の対応する成分を掛け，これらの n 個の積を加え合わせればよい．このことを簡単に **“行を列に掛ける”** という．図 1.4 はこの操作を図示したものである．

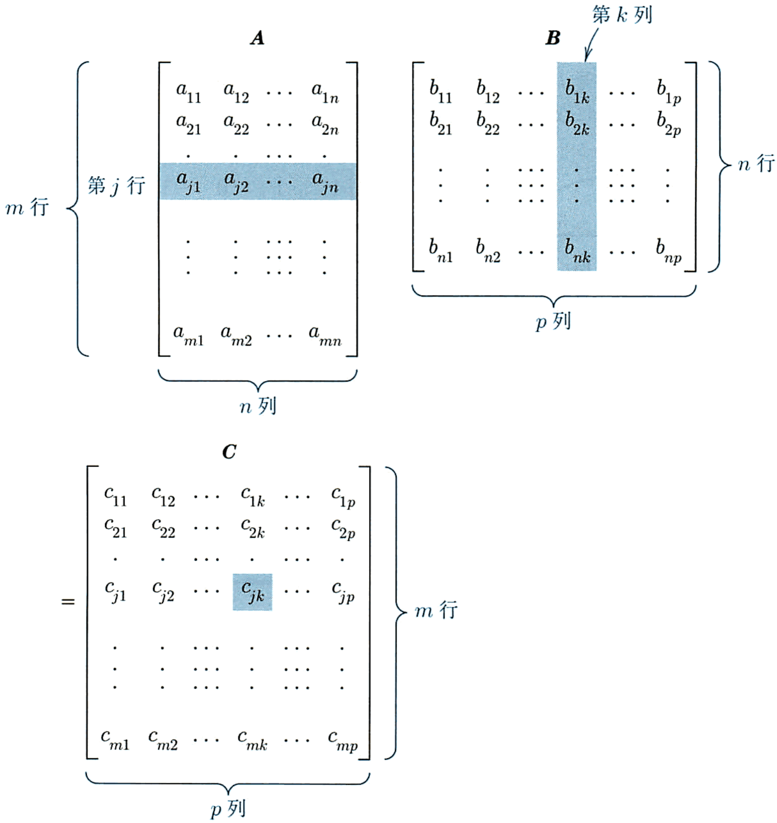


図 1.4　行列の積 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$

例 1　行列の積

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 7 & 2\\ 9 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 2+3\cdot 1 & 4\cdot 5+3\cdot 6\\ 7\cdot 2+2\cdot 1 & 7\cdot 5+2\cdot 6\\ 9\cdot 2+0\cdot 1 & 9\cdot 5+0\cdot 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 38\\ 16 & 47\\ 18 & 45\end{bmatrix}.$$

ここで $\boldsymbol{A}$ は 3×2 行列，$\boldsymbol{B}$ は 2×2 行列，したがって $\boldsymbol{AB}$ は 3×2 行列である．$\boldsymbol{BA}$ は定義されない． ◀

例 2　行列とベクトルの積

$$\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12+10\\ 3+40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22\\ 43\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 8\end{bmatrix}\text{ は定義されない．}$$ ◀

例 3 行ベクトルと列ベクトルの積

$$[3 \quad 6 \quad 1]\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} = [19], \qquad \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}[3 \quad 6 \quad 1] = \begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\6 & 12 & 2\\12 & 24 & 4\end{bmatrix}.$$ ◀

数の積との相違点

行列の積には通常の数の積とは違ういくつかの特異な性質がある．もちろんこれは実用上非常に重要なことである．

例 4 ［注意］ **行列の積は可換ではなく，一般には $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ である．このことはすでに例 1, 2, 3 で示されているが，2 つの正方行列の積でもなりたつのである．**

$$\begin{bmatrix}9 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\cdot 1+3\cdot 2 & 9\cdot(-4)+3\cdot 5\\-2\cdot 1+0\cdot 2 & (-2)\cdot(-4)+0\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15 & -21\\-2 & 8\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & -4\\2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 9+(-4)\cdot(-2) & 1\cdot 3+(-4)\cdot 0\\2\cdot 9+\quad 5\cdot(-2) & 2\cdot 3+\quad 5\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17 & 3\\8 & 6\end{bmatrix}.$$ ◀

例 5 ［注意］ **$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ であっても，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ もしくは $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$ であるとは限らない．**

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}.$$ ◀

例 6 ［注意］ **$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD}$ であっても $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ とは限らない ($\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ の場合でさえ)．**

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 3\\8 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}.$$

すなわち，数に対する簡約法則は行列には拡張できない．簡約法則の誤用は初学者の誤りのおもな原因といえる． ◀

上の実例から，数の積の性質とは異なる行列の積の 3 つの性質が見いだされた．すなわち

$$\text{一般には，} \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}. \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \text{ でも } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \text{ もしくは } \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0} \text{ とは限らない．} \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD} \text{ でも } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} \text{ とは限らない．} \tag{2c}$$

(性質 (2b) で $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}$ とおけば，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{0}$ したがって $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD}$ となり，性質 (2c) が導かれる．) 性質 (2a) の結果として，行列の積ではその掛ける順序に注意を払わなければならない．積 $\boldsymbol{AB}$ における掛け算の順序をはっきりさせるために，$\boldsymbol{B}$ に $\boldsymbol{A}$ を前から (左から) 掛ける，あるいは $\boldsymbol{A}$ に $\boldsymbol{B}$ を後ろから (右から) 掛けるなどという．性質 (2b) については 1.7 節でさらにくわ

しく考えることにしよう．行列の積のほかの性質は数の積の場合とよく似ていて，つぎのようにまとめることができる．

$$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}) \qquad (k\boldsymbol{AB}\text{または}\boldsymbol{A}k\boldsymbol{B}\text{と書ける}), \tag{2d}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} \qquad (\boldsymbol{ABC}\text{と書ける}), \tag{2e}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}, \tag{2f}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{CB}. \tag{2g}$$

ここで，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ は左辺が定義できる行列で k はスカラーである．

特殊な行列

特別なタイプの行列は本書の中でしばしば現れるので，いくつか重要な行列をここでとりあげておこう．

3 角 行 列

正方行列の主対角線上かその上側だけに0でない成分があり，その下側の成分がすべて0であるものを**上3角行列**という．同様に，主体角線上かその下側だけに0でない成分をもつ正方行列を**下3角行列**とよぶ．これらの3角行列の主対角線上の成分 (対角成分) は0でも0でなくてもよい．

例 7　**上3角行列と下3角行列**

上3角行列　$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

下3角行列　$\begin{bmatrix}5 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 8 & -1 & 0\\ 7 & 6 & 8\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 9 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 9 & 3 & 6\end{bmatrix}$.　◀

対 角 行 列

対角行列とは主対角線上にのみ0でない成分をもつ正方行列のことである．主対角線の上側や下側の成分はすべて0になる．

対角行列 $\boldsymbol{S}$ のあらゆる対角成分が定数 c に等しいとき，$\boldsymbol{S}$ を**スカラー行列**という．正方行列 $\boldsymbol{A}$ と同じ型のスカラー行列 $\boldsymbol{S}$ との積は

$$\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{SA} = c\boldsymbol{A} \tag{3}$$

を満足し，$\boldsymbol{A}$ のスカラー倍と一致するからである．

とくに，対角成分がすべて 1 であるスカラー行列を**単位行列** (あるいは**恒等行列**) とよび，$\boldsymbol{I}_n$ あるいは単に $\boldsymbol{I}$ と記す．$\boldsymbol{I}$ に対しては，公式 (3) は以下のように書きかえられる．

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}. \tag{4}$$

例 8 対角行列 $\boldsymbol{D}$，スカラー行列 $\boldsymbol{S}$，単位行列 $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [d_j \delta_{jk}], \qquad = [c\delta_{jk}], \qquad = [\delta_{jk}]$$

δ_{jk} は後に定義する**クロネッカーデルタ**である． ◀

積の転置行列

行列の積の転置行列 (1.1 節) は積の因子のおのおのを転置して**逆の順序に掛けた**ものに等しい．すなわち，

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T. \tag{5}$$

この有用な公式 (5) は行列の積の定義からただちに導かれるので，証明は読者に任せよう．(協同プロジェクト 10 を参照せよ．)

例 9 積の転置行列

$$(\boldsymbol{AB})^T = \left(\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 30 & 100 \\ 4 & 16 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 4 & 15 \\ 100 & 16 & 55 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 4 & 15 \\ 100 & 16 & 55 \end{bmatrix}.$$ ◀

ベクトルの内積

ベクトルの内積は行列の積の特別な場合にあたるが，よく使われるため特別な名称と記号が与えられている．

いま，$\boldsymbol{a}$ を n 成分の行ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を n 成分の列ベクトルとすれば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の行列積は 1×1 行列となり，ただ 1 つの成分をもつスカラーとみなすことができる．この積を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**または**ドット積**とよび，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ で表す．したがって，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [a_1 \quad \cdots \quad a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_l b_l = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n. \tag{6}$$

例 10　内積　$\boldsymbol{a} = [4 \quad -1 \quad 5]$，$\boldsymbol{b} = [2 \quad 5 \quad 8]^T$（$\boldsymbol{b}$ は列ベクトル）のとき，これらのベクトルの内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [4 \quad -1 \quad 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 43$$

で与えられる． ◀

3.2 節で述べるように内積は力学や幾何学への応用が興味深い．しかし，ここでは行列の積を簡潔に表現するために内積を利用することにしよう．

行ベクトルと列ベクトルによる積の表現

行列積の演算は行の列への掛け算であるから，内積を使って式 (1) を書きかえることができる．実際，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ の全成分は内積であって，

$$c_{11} = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (\boldsymbol{A}\text{の第 1 行}) \cdot (\boldsymbol{B}\text{の第 1 列}),$$

$$c_{12} = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = (\boldsymbol{A}\text{の第 1 行}) \cdot (\boldsymbol{B}\text{の第 2 列})$$

などのように表される．一般項は

$$c_{jk} = \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{b}_k = (\boldsymbol{A}\text{の第 } j \text{ 行}) \cdot (\boldsymbol{B}\text{の第 } k \text{ 列}) \tag{7}$$

となる．

例 11　行ベクトルと列ベクトルによる行列積の表現　行列 $\boldsymbol{A}$ とその行ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= [4 \quad 3] \\ \boldsymbol{a}_2 &= [7 \quad 2] \\ \boldsymbol{a}_3 &= [9 \quad 0] \end{aligned}$$

であり，行列 $\boldsymbol{B}$ とその列ベクトルは

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

であるとする．式 (6) と式 (7) から積 $\boldsymbol{AB}$ を求めると，

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 7 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 9 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 9 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 38 \\ 16 & 47 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}$$

となり，この結果は例 1 と一致する． ◀

一般の場合には，$\boldsymbol{A}$ が $m \times n$ 行列で $\boldsymbol{B}$ が $n \times p$ 行列ならば，$\boldsymbol{AB}$ は $m \times p$ 行列となり，つぎのように表される．

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}. \qquad (\mathbf{8})$$

1 次変換による行列積の動機づけ

ここでやや“不自然な”行列積の意味を考えてみたい．そもそも積の定義式 (1) を選んだ動機は，行列を**1 次変換**に利用できるようにすることであった．1 次変換の一般形については後に 1.8 節で述べるが，ここではもっとも簡単な 2 変数の変換形

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_2 + a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad (9)$$

をとりあげよう．これは平面上における x_1x_2 座標系と y_1y_2 座標系の間の関係と考えられる．さらに，この x_1x_2 系は第 3 の w_1w_2 座標系と別の 1 次変換

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2, \\ x_2 &= b_{21}w_1 + a_{22}w_2 \end{aligned} \qquad (10)$$

によって結ばれているとする．式 (10) を式 (9) に代入すれば，y_1y_2 系は 1 次変換

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2, \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned} \qquad (11)$$

によって直接 w_1w_2 系と結ばれることになる．計算の結果は

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2), \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \end{aligned}$$

である．これと式 (11) を比較して

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, \qquad & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}, \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, \qquad & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

を得る．あるいは簡潔に

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} = \sum_{i=1}^{2} a_{ji}b_{ik} \qquad (j, k = 1, 2) \qquad (12)$$

と書いてもよい．これは式 (1) で $m = n = p = 2$ の場合にあたる．

以上の計算は何を示しているのだろうか．本質的にはつぎの 2 つの事実である．まず，1 次変換が行列を使って簡潔に表現されるように行列の積を定義し

たということである．いまの例では，式 (9) は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，すなわち

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9*}$$

となり，式 (10) についても同様に

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{10*}$$

が得られる．つぎに，係数行列 $\boldsymbol{A}$ の 1 次変換と係数行列 $\boldsymbol{B}$ の 1 次変換を続けて行ったときに，それらの**合成変換**の係数行列 $\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を変換の順序に従って掛けた行列積 $\boldsymbol{AB}$ に等しいということである．実際，式 (9*), (10*), (11) から

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{AB}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} \qquad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB})$$

が導かれる．

多次元の場合でも考え方や結果はまったく同じで，変数の数が変わるだけである．m 個の変数 $y_1, \cdots, y_m$，n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$，p 個の変数 $w_1, \cdots, w_p$ を扱うときには，図 1.4 のように $\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{B}$ は $n \times p$ 行列，$\boldsymbol{C}$ は $m \times p$ 行列になる．$\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{AB}$ と一致するという条件から積の一般形 (1) が導かれる．これで行列積の意味が完全に理解されたことになる．

行列の積の応用

例 12　**ダイエット計画，行列とベクトルの積**　ダイエット (体重調整のための食事療法) の計画では，散歩，サイクリング，ジョギングなどが推奨される．体重 180 ポンドの患者の 1 時間あたりのエネルギー消費量は，散歩 (時速 3 マイル) で 300 カロリー，サイクリング (時速 12 マイル) で 400 カロリー，ジョギング (時速 5 マイル) で 900 カロリーである．体重 180 ポンドの人がつぎの行列に従ってダイエットの週間計画をたてた．(w は散歩，b はサイクリング，j はジョギングを表す．)　計算を確かめよ．

$$\begin{array}{c} \\ 月 \\ 水 \\ 金 \\ 土 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{w} & \mathrm{b} & \mathrm{j} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.5 \\ 1.0 & 0.75 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0.5 \\ 1.5 & 1.0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 600 \\ 750 \\ 1300 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 月 \\ 水 \\ 金 \\ 土 \end{array}. \qquad ◀$$

例 13　**コンピュータの生産，行列と行列の積**　ある会社で PC786 と PC886 という 2 型式のコンピュータを生産している．行列 $\boldsymbol{A}$ はコンピュータの原価 (1000 ドル単位) を材料費，労務費，その他の経費に分けて示し，行列 $\boldsymbol{B}$ は 2000 年の生産高 (1000 台単

位) を 4 半期ごとに示している．4 半期別の生産経費 (100000 ドル単位) を株主に報告するための行列 $\boldsymbol{C}$ をつくれ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \text{PC786} \quad \text{PC886} \\ \left[\begin{array}{cc} 0.3 & 0.5 \\ 0.8 & 1.3 \\ 0.7 & 0.9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{材料費} \\ \text{労務費}, \\ \text{その他} \end{array} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \text{4 半期} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{PC786} \\ \text{PC886} \end{array}.$$

［解］ 行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を使って行列 $\boldsymbol{C}$ を計算すると，

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{array}{c} \text{4 半期} \\ 1 \quad\ 2 \quad\ 3 \quad\ 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 2.2 & 1.8 & 1.6 & 1.9 \\ 5.8 & 4.7 & 4.2 & 5.0 \\ 4.6 & 3.4 & 3.2 & 3.9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{材料費} \\ \text{労務費} \\ \text{その他} \end{array}.$$

実際，最初の 4 半期における材料費は $c_{11} = 0.3 \cdot 4 + 0.5 \cdot 2 = 2.2$ であり，労務費は $c_{21} = 5.8$，その他の経費は $c_{31} = 4.6$ となる．ほかの 4 半期についても同様に計算できる． ◀

例 14 **確率行列，マルコフ過程，行列のベキ** ある都市には空き地を除いて 50 平方マイルの土地があるが，その 1998 年度の利用状態は，I (住宅用地) 30%，II (商業用地) 20%，III (工業用地) 50%であった．5 年間隔の利用状態の推移確率が行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \text{基準状態} \\ \text{I} \quad\ \text{II} \quad\ \text{III} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \ \text{5 年後の状態}$$

で表されるとして，2003 年，2008 年，2013 年における利用状態を定めよ．

［注意］ すべての成分が非負で，同じ列に属する成分の和がすべて 1 になる行列を**確率行列**という．すると $\boldsymbol{A}$ は確率行列である．確率過程は，ある状態に入る確率がその直前に占めていた状態 (それに過程を規定する確率行列) だけで決まるとき，**マルコフ**[1]**過程**とよばれる．この例はマルコフ過程である．

［解］ 行列 $\boldsymbol{A}$ と 1998 年の状態から 2003 年の状態を計算すると，

$$\begin{aligned} &\text{I (住宅用地)} && 0.8 \cdot 30 + 0.1 \cdot 20 + 0 \cdot 50 = 26\,[\%], \\ &\text{II (商業用地)} && 0.1 \cdot 30 + 0.7 \cdot 20 + 0.1 \cdot 50 = 22\,[\%], \\ &\text{III (工業用地)} && 0.1 \cdot 30 + 0.2 \cdot 20 + 0.9 \cdot 50 = 52\,[\%]. \end{aligned}$$

---

1) Andrei Andrejevitch Markov (1856–1922)，ロシアの数学者．確率論の研究で知られている．

和は当然100%になる．これを行列の形で書こう．1998年の状態を列ベクトル$\boldsymbol{x}$，2003年の状態を$\boldsymbol{y}$で表せば，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.7 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\20\\50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26\\22\\52\end{bmatrix}.$$

同様に，2008年，2013年の状態ベクトルについても次式が得られる．

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=[23.0\quad 23.2\quad 53.8]^T,$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=[20.72\quad 23.92\quad 55.36]^T.$$

［答］ 2003年では，住宅用地は26% (13平方マイル)，商業用地は22% (11平方マイル)，工業用地は52% (26平方マイル) である．それぞれの数値は，2008年には23.0%, 23.2%, 53.8%に，さらに2013年には20.72%, 23.92%, 55.36%に変わる． ◀

❖❖❖❖❖ 問題 1.2 ❖❖❖❖❖

行列と行列またはベクトルとの積

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4 & 6 & 2\\ 6 & 0 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{d}=[4\quad 3\quad 0]$$

としてつぎの積を計算せよ．積が定義されない場合にはその理由を述べよ．計算の途中で現れる行列の積も示せ．

1. $\boldsymbol{Ba},\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{aB}$

2. $\boldsymbol{Ca},\ \boldsymbol{C}^2\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{C}^3\boldsymbol{a}$

3. $\boldsymbol{C}^2,\ \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{CC}^T$

4. $\boldsymbol{Ca},\ \boldsymbol{Cd},\ \boldsymbol{dC}$

5. $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}^T,\ \boldsymbol{da},\ \boldsymbol{ad}$

6. $5\boldsymbol{aa}^T,\ 5\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{d})\boldsymbol{B}$

7. $\boldsymbol{BB}^T,\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{BB}^T\boldsymbol{B}$

8. $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{BB}^T\boldsymbol{d}^T,\ \boldsymbol{dBB}^T\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{CB},\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}^T$

9. $\frac{1}{2}\boldsymbol{C}^2-\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{C}(\frac{1}{2}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}),\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^T$

10. **［協同プロジェクト］ 特殊な行列** このプロジェクトは，行列代数の実用上重要な性質 (数の演算とまったく異なるものも含まれる) に慣れるために設定された．

(a) **対称行列** (1.1節) 任意の行列$\boldsymbol{A}$に対して行列$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AA}^T$が対称行列であることを示せ．対称行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$の積$\boldsymbol{AB}$は，$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$が可換で$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$のとき，またそのときに限り対称行列であることを示せ．対称行列でしかも交代行列でもあるようなすべての実正方行列を見いだせ．

(b) **ベキ等行列とベキ零行列** $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ならば$\boldsymbol{A}$は**ベキ等行列**であるといい，ある整数$m$に対して$\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{0}$ならば$\boldsymbol{B}$は**ベキ零行列**であるという．零行列$\boldsymbol{0}$でも単位行列$\boldsymbol{I}$でもないベキ等行列とベキ零行列の例をあげよ．さらに，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$を満足する行列の例をあげよ．

(c) **3角行列** $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$を上3角行列，$\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2$を下3角行列とする．行列

$$\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{U}_2,\quad \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2,\quad \boldsymbol{U}_1^2,\quad \boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{L}_1,\quad \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{L}_1,\quad \boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2,\quad \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2,\quad {\boldsymbol{L}_1}^2$$

の中から 3 角行列を選びだし，実例を示せ．なお，転置行列を利用して解答の手間を減らせないか考えてみよ．

(d) **積の転置** 基本公式 (5) を示す例を与え，証明せよ．

(e) **数の積との相違点**は本文中の例 3–6 に示されている．3×3 行列による同様な実例をあげよ．

応 用

11. (利益ベクトル) ニューヨークとシカゴに家具の直販店 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ があり，それぞれベッド (B) を利益 85 ドル，テーブル (T) を利益 62 ドル，椅子 (C) を利益 30 ドルで販売している．ある週の売上げ数は行列

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{A} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathrm{B} & \quad\mathrm{T} & \quad\mathrm{C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 400 & 60 & 240 \\ 100 & 120 & 500 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 \end{array}$$

で表される．“利益ベクトル” $\boldsymbol{p}$ を導入すれば，ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ は $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ 両店の総利益を与える．ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めよ．

12. (生産) ある生産プロセスが正常に働いている状態を N，なんらかのトラブルが生じた異常な状態を T とする．ある日の状態から翌日の状態への推移確率は $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ に対して 0.8，したがって $\mathrm{N} \to \mathrm{T}$ に対して 0.2 である．また，$\mathrm{T} \to \mathrm{N}$ および $\mathrm{T} \to \mathrm{T}$ に対する推移確率はいずれも 0.5 である．今日トラブルが起こらなかったとすれば，2 日後にトラブルが起こる確率はいくらか．3 日後はどうか．

13. (マルコフ過程) 推移確率行列 $\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,]$ のマルコフ過程を考える．行列 $\boldsymbol{A}$ の成分を $a_{11} = a_{12} = 0.5$，$a_{21} = 0.2$，$a_{22} = 0.8$，初期状態を表すベクトルを $[0.5 \quad 0.5]^T$ として，つぎの 3 段階の状態ベクトルを計算せよ．

14. (演奏会の予約) ある連続演奏会の予約者は 100000 人の愛好者の集団からでている．いま予約している人が予約を更新する確率は 90%で，まだ予約していない人が来シーズンに予約する確率は 0.2%である．現在の予約者数を 1200 人として，次の 3 シーズンの予約者の増減を予測することができるか．

15. (マルコフ過程) $\boldsymbol{A}$ のかわりに $\boldsymbol{A}^T$ を用い，さらに列ベクトルのかわりに行ベクトルを用いて，例 14 の解を書きなおせ．

16. (マルコフ過程) 例 14 の $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}^2$ でおきかえた結果は何を意味するか．

17. **[CAS プロジェクト] マルコフ過程** 3×3 行列で表されるマルコフ過程のためのプログラムをつくれ．そのプログラムを例 14 のつぎの諸段階の計算に使え．得られた数値は 12.5%, 25%, 62.5%に収束するようにみえるか．別の 3×3 確率行列，別の初期ベクトルによる実験も行え．

18. **[協同プロジェクト] 1 次変換としての回転** 回転は応用が多い．このプロジェクトでは回転が行列によってどのように扱えるかを示したい．

(a) **平面における回転** 1 次変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

のとき，平面上における $x_1 x_2$ 直交座標系の原点のまわりの回転を表すことを示せ．ただし，θ は反時計まわりの回転角である．

(b) **角 $n\theta$ の回転** (a) 中の $\boldsymbol{A}$ について，

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

を証明せよ．これは何を意味するか．言葉で説明せよ．

(c) **正弦と余弦の加法公式** 幾何学的には

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

がなりたつはずである．これから 3 角関数の加法公式 (付録 A3.1 の式 (6)) を導け．

(d) **コンピュータグラフィックス** 平面で囲まれた 3 次元立体 (たとえば立方体) を視覚化するために，各頂点の適当な $x_1x_2x_3$ 座標系に関する位置ベクトル (および頂点を結ぶ辺のリスト) を記憶させ，それから立体を座標面 (たとえば x_1x_2 平面) に射影してビデオ画面上に 2 次元像をつくる．像の外観を変えるためには，記憶された位置ベクトルに 1 次変換を施せばよい．対角成分 3, 1, $\frac{1}{2}$ をもつ対角行列 $\boldsymbol{D}$ は，もとの位置ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_j]$ を新しい位置ベクトル $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Dx}$ に変換し，$y_1 = 3x_1$ (x_1 方向で 3 倍に拡大)，$y_2 = x_2$ (x_2 方向は不変)，$y_3 = x_3/2$ (x_3 方向で $\frac{1}{2}$ に縮小) を与えることを示せ．

(e) **空間における回転** $\boldsymbol{A}$ が 3 つの行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のどれかであるとき，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ を幾何学的に説明せよ．これらの変換は (d) の状況のもとではどんな効果を及ぼすか．

1.3 連立 1 次方程式，ガウス消去法

行列が実際に役だつもっとも重要な応用は連立 1 次方程式の解法である．連立 1 次方程式は多くの問題のモデルとして，たとえば力学構造，電気回路網，交通の流れ，生産と消費，職業の分配，人口問題，統計学，微分方程式の数値解法 (第 5 巻 3 章) などに現れるからである．本節では重要な解法であるガウス消去法を扱う．解の一般的な性質は次節以後に論じることにする．

連立 1 次方程式，係数行列，拡大行列

n 個の未知数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する m 個の連立 1 次方程式は

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

のような形である．3 つの未知数をもつ 2 つの方程式の系では，

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2. \end{aligned} \quad \text{たとえば} \quad \begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 &= 4, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

a_{jk} は定数であって，この連立方程式の**係数**とよばれる．b_j もまた定数である．すべての b_j が 0 のとき，式 (1) は**同次**であるという．これに対して，b_j のうちに少なくとも 1 つは 0 でないものがあるとき，式 (1) は**非同次**であるという．

式 (1) の m 個の方程式を同時に満足する $x_1, \cdots, x_n$ の組を式 (1) の**解**とよぶ．式 (1) の**解ベクトル**というのは，式 (1) の解を成分とするベクトル $\boldsymbol{x}$ のことである．連立方程式が同次ならば，少なくとも 1 組の**自明な解** $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$ が存在する．

連立 1 次方程式 (1) の行列形　行列の積の定義から，式 (1) の m 個の方程式はただ 1 つのベクトル方程式

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}} \qquad (2)$$

で表されることがわかる．ここで，**係数行列** $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ は $m \times n$ 行列で

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

であり，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

は列ベクトルである．係数 a_{jk} がすべて 0 になることはない，つまり $\boldsymbol{A}$ は零行列ではないとする．$\boldsymbol{x}$ は n 個の成分をもつが，$\boldsymbol{b}$ は m 個の成分をもつことに注意しなければならない．行列

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

は連立方程式 (1) の**拡大行列**とよばれる．$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ は $\boldsymbol{A}$ に列 $\boldsymbol{b}$ を添加して得られる．拡大行列は，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

と書くこともある．この縦の破線は $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ の最終列が連立方程式の右辺であることを示すためにつけ加えた．

行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ には式 (1) に現れるすべての定数が含まれているので，連立方程式 (1) は $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ によって完全に決定される．

例 1　**幾何学的解釈，解の存在**　$m = n = 2$ のときには，2 つの未知数 x_1, x_2 に関する 2 つの 1 次方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

が得られる．x_1, x_2 を x_1x_2 平面における座標と解釈すれば，2 つの方程式はいずれも直線を表す．(x_1, x_2) は，座標 x_1, x_2 の点 P が両直線上にあるとき，またそのときに限って解である．したがって，つぎの 3 つの場合が考えられる．

(a)　直線が平行ならば解は存在しない．

(b)　直線が交わればただ 1 組の解が存在する．

(c)　直線が一致すれば無限に多くの解が存在する．

たとえば，

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

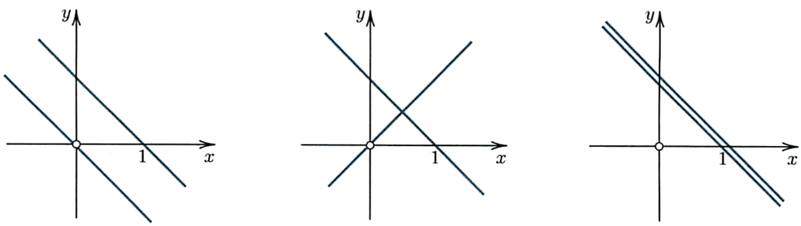
場合 (a)

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

場合 (b)

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

場合 (c)



連立方程式が同次のときには (a) の場合は起こりえない．なぜなら，この場合には 2 つの直線がともに原点を通り，その座標 0, 0 が自明な解になっているからである．3 つの未知数に関する 3 つの連立方程式についても，空間における 3 つの平面の表現と考えて，同様な議論により可能な場合を調べることができる．◀

上の簡単な例から，連立方程式 (1) は必ずしも解をもつとは限らないことがわかったので，つぎのような疑問が起こる．与えられた連立方程式 (1) には解

が存在するのか．どんな条件のもとで式 (1) はただ 1 組の解をもつのか．もしも 2 組以上の解が存在するとすれば，すべての解を特定できるのか．それらの解は実際にどのようにして得られるのか．これは実用の立場からもっとも重要な問題である．それゆえここではまずこの問題をとりあげ，その他の問題は 1.5 節にゆずりたい．

ガウス消去法

ガウス[2)]消去法は連立 1 次方程式を解く標準的な方法である．この方法は実用性の高い系統的な消去法であって，計算時間と記憶容量の両面でコンピュータによる数値計算に適している．たとえば，2 元 1 次方程式

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 &= \ \ 2, \\
4x_1 + 3x_2 &= 18
\end{aligned}
$$

を解くときには，第 1 式に 2 を掛け第 2 式から引けば，

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 &= \ \ 2, \\
-\,7x_2 &= 14
\end{aligned}
$$

が得られる．これが 2 方程式の場合の “ガウス消去法” である．解は “後退代入” によって，$x_2 = 14/(-7) = -2$，$x_1 = (2-5x_2)/2 = (2+10)/2 = 6$ となる．

連立 1 次方程式はその拡大行列によって完全に決定されるから，消去の手順を実行する場合には拡大行列について考察するだけでよい．この対応関係をみるために，連立方程式と拡大行列を並べて書くことにする．

例 2　ガウス消去法，電気回路網　つぎの連立 1 次方程式を解け．

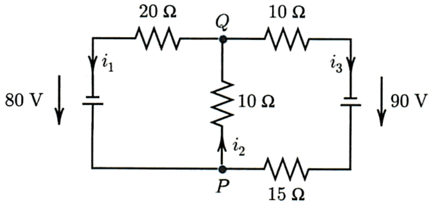
$$
\begin{aligned}
x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 &= \ \ 0, \\
-x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 &= \ \ 0, \\
10x_2 + 25x_3 &= 90, \\
20x_1 + 10x_2 \qquad\quad &= 80.
\end{aligned}
$$

図 1.5 の電気回路からの誘導［選択］　上の連立 1 次方程式は，図 1.5 に示された電気回路網を流れる未知の電流 $x_1 = i_1$，$x_2 = i_2$，$x_3 = i_3$ の間の関係を表している．これらの電流には図のように記号をつけ，向きは任意に選ぶ．もし電流の値が負になれば，電流は矢印と逆向きに流れる．電池から流出する電流は電池に流入する電流と同じである．電流に関する方程式はキルヒホッフ[3)]の法則から導かれる．

---

2) Carl Friedrich Gauss (1777–1855)，ドイツの大数学者．彼はヘルムステットとゲッチンゲンで学生であったときにすでに，彼の偉大な諸発見の中の最初の発見をしていた．1807 年にゲッチンゲン大学の教授兼天文台長になった．彼の業績は，代数学，整数論，微分方程式，微分幾何学，非ユークリッド幾何学，複素関数論，数値解析，天文学，測地学，電磁気学，理論力学の分野で基本的かつ重要である．彼はまた複素数の一般的かつ系統的な方法論を開拓した．

3) Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887)，ドイツの物理学者．



$$
\begin{array}{ll}
\text{節点 } P: & i_1 - i_2 + i_3 = 0, \\
\text{節点 } Q: & -i_1 + i_2 - i_3 = 0, \\
\text{右のループ}: & 10i_2 + 25i_3 = 90, \\
\text{左のループ}: & 20i_1 + 10i_2 = 80.
\end{array}
$$

図 1.5　例 2 の回路網と電流方程式

キルヒホッフの電流の法則 (KCL)　回路の任意の点において，流入する電流の和は流出する電流の和に等しい．

キルヒホッフの電圧の法則 (KVL)　任意の閉回路において，電圧降下の和は印加された起電力の和に等しい．

第 1 式は節点 P，第 2 式は節点 Q，第 3 式は右のループ，第 4 式は左のループにおける法則を表している．

ガウス消去法による解　この連立方程式は非常に簡単なので，ほとんど計算せずに視察だけで解けそうである．しかしそれが問題ではない．重要なことは，多数の方程式の系に対しても一般的に通用する系統的な消去法，すなわち，ガウス消去法を実行することである．ガウス消去法は連立 1 次方程式を “3 角型” に帰着するので，“後退代入” によって未知数の値を定めることができる．

つぎに連立 1 次方程式と拡大行列を並べて書いておく．

$$
\begin{array}{rr}
 & \text{方程式} \\
\text{枢軸 } 1 \rightarrow & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\
\text{消去} \rightarrow & 10x_2 + 25x_3 = 90 \\
 & 20x_1 + 10x_2 \qquad = 80
\end{array}
\qquad
\text{拡大行列}\;
\left[\begin{array}{rrr|r}
1 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 10 & 25 & 90 \\
20 & 10 & 0 & 80
\end{array}\right]
$$

ステップ 1：x_1 の消去　最初の方程式をステップ 1 における**枢軸方程式**，その x_1 項の係数 1 を**枢軸** (ピボット) という．この方程式を使ってほかの方程式から x_1 を消去したい．そのためにつぎのような操作を行う．

2 番目の方程式に枢軸方程式の 1 倍を加える[4]．

4 番目の方程式に枢軸方程式の −20 倍を加える[4]．

この操作は拡大行列では行の操作に相当する．結果としては，

$$
\begin{array}{r}
x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
0 = 0 \\
10x_2 + 25x_3 = 90 \\
30x_2 - 20x_3 = 80
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{rrr|r}
1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10 & 25 & 90 \\
0 & 30 & -20 & 80
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\text{第 2 行} + \text{第 1 行} \\
\\
\text{第 4 行} -20\times \text{ 第 1 行}
\end{array}
\qquad (3)
$$

4) 数値アルゴリズムの統一性という観点からは，“加法” と “減法” を区別せずにすべて “加法” とよぶほうがよい．

ステップ2：x_2 の消去　ステップ1で枢軸方程式として用いた最初の方程式には今回はふれずにおく．つぎの枢軸方程式としては (新しい) 2番目の方程式を選びたい．しかしこれは $0=0$ であって，つぎの枢軸として必要な x_2 項を含んでいない．そこで，まず方程式 (および新しい行列の対応する行) の順序を変えて0でない枢軸をつくらなければならない．実際には2番目の方程式 $0=0$ を最後に移し，3番目と4番目の方程式を1番ずつ繰り上げる．この方法を**枢軸の部分選択法**[5)]という．ゆえに，

$$\begin{array}{llrl} & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \text{枢軸 } 10 \longrightarrow & 10x_2 + 25x_3 = 90 \\ \text{消去} \longrightarrow & 30x_2 - 20x_3 = 80 \\ & 0 = 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2 を消去する操作としては，

3番目の方程式に枢軸方程式の -3 倍を加える．

結果はつぎのようになる．

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ -95x_3 &= -190 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{第3行} -3\times\text{第2行} \tag{4}$$

後退代入：x_3, x_2, x_1 の (この順序での) 決定　"3角型" の連立方程式 (4) から出発して逆向きに代入していけば，x_3, x_2, x_1 の順に未知数の値を求めることができる．

$$\begin{aligned} -95x_3 &= -190, & x_3 &= i_3 = 2\,[\mathrm{A}], \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90, & x_2 &= (90 - 25x_3)/10 = i_2 = 4\,[\mathrm{A}], \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0, & x_1 &= x_2 - x_3 = i_1 = 2\,[\mathrm{A}]. \end{aligned}$$

これがこの問題の答えである．解は一意的に定まる．◀

基本行変形，行同値な連立1次方程式

例2にはガウス消去法における各種の操作が示されているが，後退代入を行う以前の操作を総称して基本操作という．これらの操作はつぎのようにまとめられる．

方程式に対する基本操作

2つの方程式を交換すること．

ある方程式の定数倍をほかの方程式に加えること．

ある方程式に0でない定数 c を掛けること．

方程式のかわりに対応する行列を考えると基本行変形が定義される．

5) 未知数の順序も変える**完全選択法**とは対照的である．完全選択法は実際にはほとんど使われていない．

行列に対する基本行変形

2つの行を交換すること．

ある行の定数倍をほかの行に加えること．

ある行に0でない定数cを掛けること．

明らかに，2つの方程式を入れかえても解は変わらない．方程式を加え合わせた場合でも，引き算によって打ち消すことができるので，やはり解は変わらない．方程式をc倍して得られる新しい方程式も，$1/c$を掛ければもとの方程式に戻る．

連立方程式S_1と連立方程式S_2は，S_2に有限回の基本操作を施してS_1を導くことができるとき，**行同値**であるという．この概念を用いてガウス消去法の有効性を示したこれまでの結果を要約しておこう．

定理 1 (行同値な連立1次方程式)　行同値な連立1次方程式は同じ解の組をもつ．

連立1次方程式(1)は，例2のように方程式の数が未知数の数よりも多いとき**優決定系**，例1のように$m=n$のとき**決定系**，方程式の数が未知数の数よりも少ないとき**劣決定系**とよばれる．

さらに，連立1次方程式(1)は解がまったく存在しないとき**不能**であるという．不能でない方程式は少なくとも1つの解をもつ．

ガウス消去法，3つの可能な場合

連立1次方程式は，例3のように無限に多くの解をもつか，例4のようにただ1組の解をもつか，あるいは例5のように解をもたないかのいずれかである．ガウス消去法はすべての3つの可能な場合に適用できることを示そう．

例 3　無限に多くの解が存在する場合のガウス消去法　4つの未知数をもつ3つの連立1次方程式

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ 1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc:c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{array}\right] \tag{5}$$

を解け．

［解］　前の例と同様に，枢軸と消去される項は囲みの中におく．

ステップ1：x_1の消去　2番目と3番目の方程式からx_1を消去する．すなわち，

2番目の方程式に1番目の方程式の$-0.6/3.0=-2.0$倍を加える．

3番目の方程式に1番目の方程式の$-1.2/3.0=-0.4$倍を加える．

このようにしてつぎの新しい連立方程式が得られる．

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ -1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc:c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{array}\right] \tag{6}$$

つぎのステップで使う枢軸と消去される項は囲みに入れておいた．

ステップ 2：x_2 の消去　(6) の3番目の方程式から x_2 を消去する．実際には，3番目の方程式に2番目の方程式の $1.1/1.1 = 1$ 倍を加える．

その結果，

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc:c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7}$$

後退代入　2番目の方程式は $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$ となる．これと1番目の方程式から $x_1 = 2 - x_4$ が得られる．x_3, x_4 は任意のまま残っているので，無限に多くの解が存在することになる．ある x_3 の値とある x_4 の値を選ぶと，それらに対応する x_1 と x_2 の値は一意的に定まる．◀

例 4　一意的な解が存在する場合のガウス消去法　つぎの連立1次方程式を解け．

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

ステップ 1：x_1 の消去　2番目と3番目の方程式から x_1 を消去すると，

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 7x_3 &= 12 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{第2行} + 3\times \text{第1行} \\ \text{第3行} - \text{第1行} \end{array}$$

ステップ 2：x_2 の消去　3番目の方程式から x_2 を消去すると，

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 7x_3 &= 12 \\ -5x_3 &= -10 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{第3行} - \text{第2行} \end{array}$$

後退代入　この最後の方程式から出発して次々に代入していくと，$x_3 = 2$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$ が得られる．このようにして，連立方程式はただ1組の解をもつことがわかった．◀

例 5　解が存在しない場合のガウス消去法　ガウス消去法を解が存在しない連立方程式に適用すれば，いったいどんなことが起こるのだろうか．この場合には，消去法は矛盾を生じて解が存在しないことを示すことになる．例として，

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

を考えよう．

ステップ 1：x_1 の消去　2 番目と 3 番目の方程式から x_1 を消去するため，

2 番目の方程式に 1 番目の方程式の $-\frac{2}{3}$倍を加える．

3 番目の方程式に 1 番目の方程式の $-\frac{6}{3}=-2$ 倍を加える．

この操作によってつぎの新しい方程式が得られる．

$$\begin{aligned} 3x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ x_3 &= \ \ 3 \\ -\tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= \ \ 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

ステップ 2：x_2 の消去　3 番目の方程式から x_2 を消去した結果は，

$$\begin{aligned} 3x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ x_3 &= \ \ 3 \\ -\tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= \ 12 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

したがってこの連立 1 次方程式は解をもたない．◀

行列の階段形，解の分類

ガウス消去法の最終段階における連立方程式と行列の形は**階段形**とよばれる．例 5 における係数行列と拡大行列の階段形はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

である．

ガウス消去法の後退代入以前の最終段階においては，連立 1 次方程式は一般につぎのような形に書くことができる．

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{2n}x_n &= {b_2}^*, \\ \cdots\cdots\cdots \\ k_{rr}x_r + \cdots + k_{rn}x_n &= \widetilde{b}_r, \\ 0 &= \widetilde{b}_{r+1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \widetilde{b}_m. \end{aligned} \tag{8}$$

ただし $r \leqq m$ (そして $a_{11} \neq 0,\ c_{22} \neq 0, \cdots, k_{rr} \neq 0$) である．方程式 (8) の解については 3 つの可能な場合が考えられる．

(a)　**解が存在しない場合**　$r < m$ で $\widetilde{b}_{r+1}, \cdots, \widetilde{b}_m$ のうちのどれかが 0 でなければ，解はまったく存在しない．例 5 がこの場合にあたり，$r = 2 < m = 3$，$\widetilde{b}_{r+1} = \widetilde{b}_3 = 12$ である．

(b)　**一意的な解が存在する場合**　$r = n$ で $\widetilde{b}_{r+1}, \cdots, \widetilde{b}_m$ が (存在しても) 0 ならば，解はただ 1 組だけ存在する．この場合には，式 (8) の n 番目の方程式から x_n を，$n-1$ 番目の方程式から x_{n-1} を，というようにさかのぼって順次解が求められる．例 2 では $r = n = 3$，$m = 4$ である．

(c)　**解が無限に存在する場合**　$r < n$ で $\widetilde{b}_{r+1}, \cdots, \widetilde{b}_m$ が (存在しても) 0 ならば，無限に多くの解が存在する．この場合には，未知数 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ の値をまったく任意に選んでおいて，r 番目の方程式から x_r を，$r-1$ 番目の方程式から x_{r-1} を，というように順次解いていけば，無数の解のうちの 1 組を定めることができる．例 3 はこの場合を表している．

[注意]　いわゆるガウス・ジョルダン消去法については 1.7 節を参照されたい．ガウス・ジョルダン消去法は，必要な計算量が多い点ではガウス消去法よりも劣っている．

枢軸の選択法については第 5 巻 2.1 節でも説明される．

❖❖❖❖❖　問題 1.3　❖❖❖❖❖

ガウス消去法　つぎの連立 1 次方程式をガウス消去法によって解け．あるいは解が存在しないことを示せ．(推論の詳細を記せ.)

1. $6x + 4y = 2,\quad 3x - 5y = -34$

2. $0.4x + 1.2y = -2.0,\quad 1.7x - 3.2y = 8.1$

3. $3.0x - 0.5y = 0.6,\quad 1.5x + 4.5y = 6.0$

4. $7y + 3z = -12,\quad 2x + 8y + z = 0,\quad -5x + 2y - 9z = 26$

5. $x + y - z = 9,\quad 8y + 6z = -6,\quad -2x + 4y - 6z = 40$

6. $4x + y = 4,\quad 5x - 3y + z = 2,\quad -9x + 2y - z = 5$

7. $13x + 12y = -6,\quad -4x + 7y = -73,\quad 11x - 13y = 157$

8. $4x - 8y + 3z = 16,\quad -x + 2y - 5z = -21,\quad 3x - 6y + z = 7$

9. $4y + 3z = 8,\quad 2x - z = 2,\quad 3x + 2y = 5$

10. $1.3x - 9.1y + 11.7z = 0,\quad -0.9x + 6.3y - 8.1z = 0$

11. $7x - 4y - 2z = -6,\quad 16x + 2y + z = 3$

12. $12x - 26y + 34z = 18,\quad -30x + 65y - 85z = -46$

13. $5x + 5y - 10z = 0,\quad 2w - 3x - 3y + 6z = 2,\quad 4w + x + y - 2z = 4$

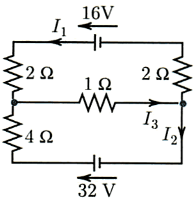
14.
$$\begin{aligned} 2w-2x+4y \quad &= 0, \\ -3w+3x-6y+5z &= 15, \\ w-\ x+2y \quad &= 0 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} 10x+\ 4y-\ 2z &= -4, \\ -3w-17x+\ y+\ 2z &= 2, \\ w+\ x+\ y \quad &= 6, \\ 8w-34x+16y-10z &= 4 \end{aligned}$$

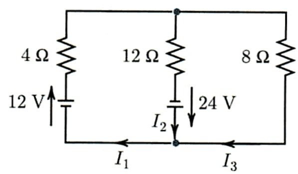
16.
$$\begin{aligned} 2w+3x+\ y-11z &= 1, \\ 5w-2x+5y-\ 4z &= 5, \\ w-\ x+3y-\ 3z &= 3, \\ 3w+4x-7y+\ 2z &= -7 \end{aligned}$$

電気回路網のモデル　例 2 で述べたキルヒホッフの法則を用いて，つぎの回路網に流れる電流を求めよ．(計算の詳細を示せ．)

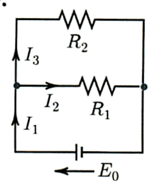
17.



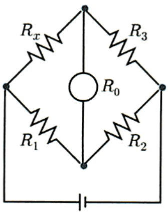
18.



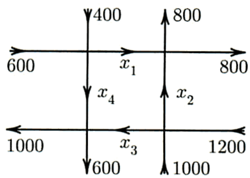
19.



20. (ホイートストンブリッジ)　図において $R_x/R_3 = R_1/R_2$ ならば，R_0 を通る電流 I が 0 であることを示せ．(R_0 は I を測定する計器の抵抗である．)　このブリッジは抵抗 R_x の測定に用いられる．R_1, R_2 は既知の定数で R_3 だけが変数である．R_x を定めるためには，$I = 0$ となるように R_3 を変化させ，$R_x = R_3R_1/R_2$ を計算すればよい．



問題 20　ホイートストンブリッジ



問題 21　一方交通道路網

21. (交通の流れ)　電気回路の解析法はほかの分野にも応用される．たとえば，キルヒホッフの電流法則を準用して，図の一方交通道路網 (矢印は一方交通の向きを示す) の交通流量 (1 時間あたりの自動車の数) を求めよ．解は一意的に定まるか．

22. (市場のモデル)　ある 2 商品市場に線形モデル

$$D_1 = 40 - 2P_1 - P_2, \qquad S_1 = 4P_1 - P_2 + 4,$$
$$D_2 = 5P_1 - 2P_2 + 16, \qquad S_2 = 3P_2 - 4$$

を適用して平衡解 ($D_1 = S_1, D_2 = S_2$) を求めよ．ただし，$D =$ 需要，$S =$ 供給，$P =$ 価格 であって，添数 1, 2 はそれぞれ第 1，第 2 の商品を示している．

23. (同値関係)　定義によれば，ある集合における同値関係とはつぎの 3 条件を満足する関係のことである．

(i)　集合の各元 A はそれ自身と同値である (反射法則).

(ii)　元 A が元 B と同値ならば，元 B は元 A と同値である (対称法則).

(iii)　元 A が元 B と同値で，かつ元 B が元 C と同値ならば，元 A は元 C と同値である (推移法則).

行列の行同値という関係はこの 3 条件を満たすことを示せ.

［ヒント］ 3 種類の基本行変形に対して同値条件が成立することを確かめよ.

24. ［プロジェクト］ **基本変形行列**　基本行変形は行列との積によっても実現される. 基本行変形を施す $m \times n$ 行列を $\boldsymbol{A}$ とすれば，変形後の新行列が $\boldsymbol{EA}$ と書けるような行列 $\boldsymbol{E}$ が存在する. この行列 $\boldsymbol{E}$ を**基本変形行列**とよぶ. (基本変形行列という概念はたとえばアルゴリズム設計などで理論的に重要である. 計算量という点では，$\boldsymbol{E}$ との積をつくるよりも直接基本行変形を施すほうがよい.)

(a)　つぎの行列はそれぞれ第 2 行と第 3 行を交換する操作，第 3 行に第 1 行の -5 倍を加える操作，第 4 行を 8 倍する操作を与える基本変形行列であることを示せ.

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

適当に選んだベクトルと 4×3 行列に $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ を適用せよ，$\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,]$ を一般の 4×2 行列として $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}$ を求めよ. $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{A}$ に等しいか.

(b)　基本変形行列 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ は対応する基本行変形を 4×4 単位行列に施して得られることを確かめよ. $\boldsymbol{M}$ が $\boldsymbol{A}$ から基本行変形によって得られるとき，

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{EA}$$

がなりたつことを証明せよ. ただし，$\boldsymbol{E}$ は $n \times n$ 単位行列 $\boldsymbol{I}_n$ から同じ基本行変形によって得られる行列である.

(c)　一般の 3×3 行列 $\boldsymbol{A}$ に対してガウス消去法 (後退代入を除く) を実行するための基本変形行列を見いだし，それらの (正しい順序での) 積を求めよ.

25. ［CAS プロジェクト］ **ガウス消去法**　枢軸選択を伴わない (後退代入を含む) ガウス消去法のプログラムをかけ. これを問題 1–10 に適用せよ. 枢軸選択が必要な場合にはどんなことが起こるか.

1.4　行列の階数，1 次独立，ベクトル空間

前節では連立 1 次方程式のもっとも重要な解法であるガウス消去法について説明した. 連立 1 次方程式は，解がまったく存在しなかったり，ただ 1 つの解が存在したり，無限に多くの解が存在したりすることも知った. そこで直面するのは，解の存在と一意性という問題である. この問題の答えは次節まで待たなければならない. ここでは，解決の鍵となる行列の階数という概念を導入する. これを定義するために，いくつかの重要な概念の説明からはじめよう.

ベクトルの1次独立と1次従属

同数の成分をもつ m 個のベクトル[6] $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ の組が与えられたとき，

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

をこれらのベクトルの**1次結合**とよぶ．ただし，$c_1, \cdots, c_m$ は任意のスカラー[7]である．いまベクトル方程式

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

を考えよう．明らかに，この式はすべての c_j が0ならば恒等的になりたつ．そのときには $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ となるからである．これ以外の場合には式(1)が成立しないとき，ベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ は**1次独立な組を構成する**，あるいは単に**1次独立**であるという．もし1次独立でなければ，全部は0でないスカラーに対しても式(1)がなりたつことになる．したがって，$\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ のうちの少なくとも1つのベクトルはほかのベクトルの1次結合として表すことができるので，これらのベクトルは**1次従属**であるという．たとえば $c_1 \neq 0$ のとき，式(1)を $\boldsymbol{a}_{(1)}$ について解けば，

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = k_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_{(m)}.$$

ただし $k_j = -c_j/c_1$ である．(いくつかの k_j は0になることもある．すべての k_j が0になるのは $\boldsymbol{a}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ の場合に限られる．)

例1 1次独立と1次従属 3つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = [\ 3 \quad 0 \quad 2 \quad 2],$$
$$\boldsymbol{a}_{(2)} = [-6 \quad 42 \quad 24 \quad 54],$$
$$\boldsymbol{a}_{(3)} = [\ 21 \quad -21 \quad 0 \quad -15]$$

が1次従属であることは，

$$6\boldsymbol{a}_{(1)} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{(2)} - \boldsymbol{a}_{(3)} = \boldsymbol{0}$$

からただちにわかる．この関係は容易に確かめられるが，みつけることはそれほど容易ではない．しかし，1次独立と1次従属をみわける一般的な方法が後に示される．

ベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \boldsymbol{a}_{(2)}$ が $c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} = \boldsymbol{0}$ を満たすとすれば，まず第2成分から $c_2 = 0$，ついでその他の成分から $c_1 = 0$ が得られる．よって $\boldsymbol{a}_{(1)}$ と $\boldsymbol{a}_{(2)}$ は1次独立である． ◀

例2 1次独立と1次従属 第1巻2章を学習ずみならば，線形微分方程式の分野でも，1次独立と1次従属の概念が解の基底(基本解)に関連して基本的であることに思いあたるはずである． ◀

---

6) 簡単に $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ と書いてもよいが，ベクトルの成分と混同しないように注意しなければならない．

7) 本節ではスカラーは実数とする．

1 次独立および 1 次従属という概念の要点は何であろうか．1 次従属なベクトルの集合からは，ほかのベクトルの 1 次結合であるベクトルを除外して，“真に本質的な”1 次独立なベクトルだけを残すことができる．こうして得られた 1 次独立なベクトルは，もはや互いにほかのベクトルの 1 次結合として表現することはできない．

行列の階数

行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ における 1 次独立な行ベクトルの最大数を $\boldsymbol{A}$ の**階数**とよび，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ と表す．

例 3　階数　行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \tag{2}$$

は階数 2 をもつ．例 1 によれば，第 1 行ベクトルと第 2 行ベクトルは 1 次独立で，3 つの行ベクトルは 1 次従属になるからである．◀

さらに，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ のときまたそのときに限り $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 0$ であることを注意したい．これは定義からすぐわかる．

連立 1 次方程式の解の存在および一意性を論じるためにはつぎの重要な定理が必要である．

定理 1　(階数の列ベクトルによる表現)　行列 $\boldsymbol{A}$ の階数は $\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な列ベクトルの最大数に等しい．したがって，$\boldsymbol{A}$ とその転置行列 $\boldsymbol{A}^T$ は同じ階数をもつ．

［証明］　$\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ を $m \times n$ 行列とし，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$ とおく．すると，定義から $\boldsymbol{A}$ は r 個の 1 次独立な行ベクトル $\boldsymbol{v}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{(r)}$ をもつ．よって，$\boldsymbol{A}$ のすべての行ベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ は 1 次独立な行ベクトル $\boldsymbol{v}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{(r)}$ の 1 次結合として表される．すなわち

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{(1)} &= c_{11}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{12}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{1r}\boldsymbol{v}_{(r)}, \\ \boldsymbol{a}_{(2)} &= c_{21}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{22}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{2r}\boldsymbol{v}_{(r)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_{(m)} &= c_{m1}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{m2}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{mr}\boldsymbol{v}_{(r)}. \end{aligned}$$

これらの方程式はベクトル方程式であって，おのおのが対応する成分に関する n 個の方程式と同値である．$\boldsymbol{a}_{(1)}$ の成分を $a_{11}, \cdots, a_{1n}$ で，$\boldsymbol{v}_{(1)}$ の成分を $v_{11}, \cdots, v_{1n}$ で，というように両辺のすべてのベクトルを成分で表すと，$k = 1, \cdots, n$ に対して

$$
\begin{aligned}
a_{1k} &= c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \cdots + c_{1r}v_{rk},\\
a_{2k} &= c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \cdots + c_{2r}v_{rk},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_{mk} &= c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \cdots + c_{mr}v_{rk}.
\end{aligned}
$$

が得られる．これはつぎのように書きかえられる．

$$
\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = v_{1k} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + v_{2k} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_{rk} \begin{bmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{bmatrix}.
$$

ここで $k = 1, \cdots, n$ である．左辺のベクトルは $\boldsymbol{A}$ の k 番目の列ベクトルである．したがって，$\boldsymbol{A}$ の列ベクトルは右辺の r 個のベクトルの 1 次結合で表されることになる．ゆえに，$\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な列ベクトルの最大数は $\boldsymbol{A}$ の階数 r，すなわち $\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な行ベクトルの最大数を超えることはできない．

さて，同じ結論は $\boldsymbol{A}$ の転置行列 $\boldsymbol{A}^T$ に対しても適用される．$\boldsymbol{A}^T$ の行ベクトルは $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルであり，$\boldsymbol{A}^T$ の列ベクトルは $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルであるから，$\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な行ベクトルの最大数 r は，$\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な列ベクトルの最大数を超えないといえる．結局この最大数は r に等しいことになり，証明が終わる． ◀

例 4　定理 1 の説明　定理 1 は，式 (2) の行列 $\boldsymbol{A}$ に関してはどのような意味をもっているのだろうか．$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$ により，列ベクトルは 2 つの 1 次独立なベクトルを含み，ほかの 2 つのベクトルはそれらの 1 次結合として表されるはずである．実際，最初の 2 つの列ベクトルが 1 次独立であって，

$$
\begin{bmatrix} 2 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 21 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 54 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 21 \end{bmatrix} + \frac{29}{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{bmatrix}
$$

と書ける．これを確かめることは容易であるが，見いだすのは容易とはいえない．行列が十分簡単でなければ，定義を直接適用して階数を決定するのは適切な方法ではないことがわかる．このことから，階数を変えずに行列を “簡約” (変換) できないかという問題が生じるが，後に肯定的な答えが示されるだろう． ◀

さらに推論を進めるために，線形代数において一般的に重要ないくつかの概念を導入しよう．

ベクトル空間，次元，基底

ベクトルの空でない集合 V において，V に属する任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 1 次結合 $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ (α, β は実数) もまた V の元であり，これらのベクトルが 1.1 節で述べた周知の法則 (4), (5) (ベクトルの記号である小文字の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \cdots$ を

使って書きかえた形) を満足するとき，V を**ベクトル空間**という[8]．

ベクトル空間 V における 1 次独立なベクトルの数の最大値を V の**次元**といい，$\dim V$ で表す．

V 内で可能な最多数の 1 次独立なベクトルの組を V の**基底**という．V の基底となるベクトルの数は $\dim V$ に等しい．

同数の成分をもつベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(p)}$ のすべての 1 次結合の集合をこれらのベクトルの**スパン**という．明らかにスパンはベクトル空間である．

ベクトル空間 V の**部分空間**とは，V の空でない部分集合であって，それ自体が V のベクトルに対して定義される 2 種類の代数演算に関するベクトル空間を構成するものを意味する．

例 5 **ベクトル空間，次元，基底** 例 1 の 3 つのベクトルのスパンは 2 次元のベクトル空間であり，基底はたとえば $\boldsymbol{a}_{(1)}, \boldsymbol{a}_{(2)}$，あるいは $\boldsymbol{a}_{(1)}, \boldsymbol{a}_{(3)}$ などである． ◀

行列 $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルのスパンは $\boldsymbol{A}$ の**行空間**とよばれ，列ベクトルのスパンは**列空間**とよばれる．

さて，定理 1 によれば，$\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な行の数と 1 次独立な列の数は同じである．その数は $\boldsymbol{A}$ の行空間または列空間の次元に等しい．よってつぎの定理が導かれる．

定理 2 **(行空間と列空間)** 行列 $\boldsymbol{A}$ の行空間および列空間は $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ に等しい同一の次元をもつ．

基本行変形に対する階数の不変性

$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な行ベクトルの最大数であった．この数は，行の順序を変えても，ある行に 0 でない定数 c を掛けても，さらにある行の定数倍をほかの行に加えても変化しない．したがってつぎの定理が得られる．

定理 3 **(行同値行列)** 行同値行列は同じ階数をもつ．

この定理は行列の階数の決定法を示唆している．すなわち，行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めるためには，ガウス消去法を利用して $\boldsymbol{A}$ を階段形 (1.3 節) に帰着させればよい．なぜならば，行列の階数は定理 3 により基本行変形に対して不変であり，しかもその階段形からただちに判定できるからである．

---
8) いまのところこの定義で十分である．一般のベクトル空間については 1.8 節で論じる．

例 6 階数の決定 例 3 の行列はつぎのように変形される．

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \quad \text{(与えられた形)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \text{(第 2 行 } +2\times \text{ 第 1 行)} \\ \text{(第 3 行 } -7\times \text{ 第 1 行)} \end{matrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{(第 3 行 } +\tfrac{1}{2}\times \text{ 第 2 行)} \end{matrix}
$$

最後の行列は階段形である．この行ベクトルと定理 3 からすぐわかるように，$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} \leqq 2$ である．ところが，最初の 2 つの列ベクトルはたしかに 1 次独立であるから，定理 1 によって $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = 2$ が得られる． ◀

この階数の決定法は，ベクトルが 1 次従属か 1 次独立かを判定する基準とも関連して実用上重要である．その鍵は階数の定義から直接導かれるつぎの定理である．

定理 4 (1 次従属と 1 次独立) それぞれ n 個の成分をもつ p 個のベクトル $\boldsymbol{x}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{(p)}$ は，行ベクトル $\boldsymbol{x}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{(p)}$ のつくる行列が階数 p をもつとき 1 次独立である．また，階数が p より小さければ 1 次従属である．

p 個のベクトルのそれぞれは n 個の成分をもっているから，それらのつくる行列 $\boldsymbol{A}$ は p 個の行と n 個の列をもっている．もしも $n < p$ ならば定理 1 により $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} \leqq n < p$ である．したがって，定理 4 の結果としてつぎの注目すべき定理が得られる．

定理 5 n 個の成分をもつ $p\ (> n)$ 個のベクトルは必ず 1 次従属である．

たとえば，平面上の 3 つまたはそれ以上のベクトルは 1 次従属である．同様にして，空間における 4 つまたはそれ以上のベクトルは 1 次従属である．

最後に次元の定義から直接導かれる定理を示そう．

定理 6 すべての n 成分のベクトルからなるベクトル空間 R^n は次元 n をもつ．

次節では本節の結果を連立 1 次方程式に応用するが，もちろんそこでは行列の階数が基本的な役割を果たすことになる．

❖❖❖❖❖❖　問題 1.4　❖❖❖❖❖❖

1 次独立

つぎのベクトルの組は 1 次独立か 1 次従属か．(推論の詳細を示せ．)

1. $[1\quad 0\quad 0]$, $[1\quad 1\quad 0]$, $[1\quad 1\quad 1]$

2. $[7\quad -3\quad 11\quad -6]$, $[-56\quad 24\quad -88\quad 48]$

3. $[-1\quad 5\quad 0]$, $[16\quad 8\quad -3]$, $[-64\quad 56\quad 9]$

4. $[1\quad -1\quad 1]$, $[1\quad 1\quad -1]$, $[-1\quad 1\quad 1]$, $[0\quad 1\quad 0]$

5. $[2\quad -4]$, $[1\quad 9]$, $[3\quad 5]$

6. $[1\quad 2\quad 3]$, $[0\quad 0\quad 0]$, $[5\quad 5\quad 1]$

7. $[1\quad 9\quad 9\quad 8]$, $[2\quad 0\quad 0\quad 3]$, $[2\quad 0\quad 0\quad 8]$

8. $[\frac{1}{4}\quad 0\quad -\frac{1}{4}]$, $[0\quad \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{3}\quad -\frac{1}{3}\quad 1]$

階　数

問題 9–17 に与えられた行列の階数を，本節の方法か視察によって求めよ．(計算の詳細を示せ．)

9. $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} m & n & p \\ n & m & p \end{bmatrix}$ $(m^2 \neq n^2)$

11. $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 7 \\ -20 & -17 & -15 \\ 11 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 10 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

ベクトル空間

以下に与えられたベクトルの集合はベクトル空間を構成するか．(理由も述べよ．) ベクトル空間ならば次元を定め基底を見いだせ．($v_1, v_2, \cdots$ は成分を表す．)

18. R^3 で $4v_2 + v_3 = k$ を満たすすべてのベクトル．

19. R^3 で $2v_1 + 3v_3 = 0$ を満たすすべてのベクトル．

20. R^5 で $v_1 = 0,\ v_3 = 0,\ v_2 + v_4 \geqq 0$ を満たすすべてのベクトル．

21. すべての 4 つの正の実数の順序組．

22. R^n ではじめの $n-2$ 個の成分が 0 であるすべてのベクトル．

23. すべての実数．

24. R^3 で $3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0,\ 4v_1 + 5v_2 = 0$ を満たすすべてのベクトル．

25. R^2 で各成分の絶対値が 1 より小さいすべてのベクトル．

26. [協同プロジェクト]　**行列の階数**　このプロジェクトの目的は，連立 1 次方程式や 1 次変換などに関連した行列の学習においてとくに重要な階数という概念に，さらに慣れることである．

(a) **定義**　適当に選んだ階数 2 の 3×4 行列の列ベクトルによって，階数の定義と特性を具体的に説明せよ．

(b) **簡単な性質**　$\operatorname{rank} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T = \operatorname{rank} \boldsymbol{AB}$ を示せ．正方行列に対しては，行ベクトルの 1 次独立と列ベクトルの 1 次独立が同値であることを示せ．正方行列でない場合には，行ベクトルと列ベクトルのどちらかがつねに 1 次従属であることを示せ．

(c) **積**　2 つの行列の積の階数はどちらの行列の階数も超えることはない．この定理を例を用いて説明せよ．

(d) **シルヴェスターの不等式**　階数 r_A の $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と階数 r_B の $n \times p$ 行列 $\boldsymbol{B}$ の積は不等式

$$r_A + r_B - n \leqq r \leqq \min(r_A, r_B)$$

を満足する．これを実例で説明せよ．また，不等式で両方とも等号がなりたつ例を見いだせ．

(e) **行列の 2 乗**　$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$ であっても必ずしも $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^2 = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}^2$ とはいえないことを例によって示せ．

27. (行空間)　行同値行列は同じ行空間をもつことを証明せよ．

28. (行空間と列空間)　問題 9 の行列の行空間および列空間の基底を見いだせ．

29. (行空間と列空間)　問題 15 の行列について問題 28 と同じことを行え．

30. (部分空間)　R^3 の 1 次元および 2 次元部分空間の例をあげよ．

1.5 連立 1 次方程式の解：存在，一意性，一般形

前節で導入された階数の概念を用いて，連立 1 次方程式の解の存在と一意性に対する必要十分条件を与えることができる．解の一般的な性質はつぎの (記憶すべき) 定理 1 に示される．(典型的な例については 1.3 節を参照せよ.)

ここで定理 1 に現れる重要な概念である小行列の説明をしておく．行列 $\boldsymbol{A}$ の**小行列**とは，$\boldsymbol{A}$ のいくつかの行と列を除いて得られる行列のことである．$\boldsymbol{A}$ それ自身も，便宜上 $\boldsymbol{A}$ から 0 個の行と 0 個の列を除いた行列と考えて，小行列の中に含めることにする．

定理 1 (連立 1 次方程式に関する基本定理)

(a) **存在**　n 個の未知数 $x_1, \cdots, x_n$ をもつ m 個の連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

は，係数行列 $\boldsymbol{A}$ と拡大行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$，すなわち，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

の階数が同じであるとき，またそのときに限って解をもつ．

(b) **一意性** この共通の階数 r が n に等しいときには，ただ 1 組の解が存在する．

(c) **無限個の解** 階数 r が n より小さければ無限に多くの解が存在する．この場合には，未知数のうち r 個を適当に選び，それらの係数からなる小行列の階数が r になるようにすると，残りの $n-r$ 個の未知数の値をまったく任意に与えるごとに，はじめの r 個の未知数の値が一意的に確定する．(1.3 節の例 3 を参照せよ．)

(d) **ガウス消去法 (1.3 節)** 解が存在するときには，ガウス消去法によってすべての解を求めることができる．(この消去法では $\boldsymbol{A}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ の階数を知らなくても計算がはじめられる．解が存在するかどうかは結果として自然にわかるからである．)

［証明］ (a) 連立 1 次方程式 (1) はベクトル方程式

$$\boxed{\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}} \tag{1*}$$

の形に書けるが，$\boldsymbol{A}$ の列ベクトル $\boldsymbol{c}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{c}_{(n)}$ を用いてつぎのように表すこともできる．

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1 + \boldsymbol{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}x_n = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ は $\boldsymbol{A}$ に列 $\boldsymbol{b}$ を添加したものであるから，2.4 節の定理 1 により rank $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ は rank $\boldsymbol{A}$ か rank $\boldsymbol{A}+1$ に等しい．もしも式 (1*) が解 $\boldsymbol{x}$ をもつとすれば，式 (2) は $\boldsymbol{b}$ がこれらの列ベクトルの 1 次結合であることを示す．したがって，rank $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ は rank $\boldsymbol{A}$ を超えることはないので，rank $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ = rank $\boldsymbol{A}$ でなければならない．

逆に，rank $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ = rank $\boldsymbol{A}$ がなりたつときには，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの 1 次結合となり，たとえば

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{c}_{(1)} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{c}_{(n)} \tag{2*}$$

のように表される．もしそうでないとすると，rank $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ = rank $\boldsymbol{A}+1$ となってしまうからである．ところが，これは式 (1) が解をもつこと，あるいは式 (2) と式 (2*) を比較してわかるように，$x_1 = \alpha_1, \cdots, x_n = \alpha_n$ であることを意味する．

(b) rank $\boldsymbol{A} = r = n$ のときには，1.4 節の定理 1 によって列ベクトルの組 $C = \{\boldsymbol{c}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{c}_{(n)}\}$ は 1 次独立である．つまり $\boldsymbol{b}$ の表現 (2) は一意的である．なぜならば，一意的でなく

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}x_n = \boldsymbol{c}_{(1)}\widetilde{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}\widetilde{x}_n$$

ならば，

$$(x_1 - \widetilde{x}_1)\boldsymbol{c}_{(1)} + \cdots + (x_n - \widetilde{x}_n)\boldsymbol{c}_{(n)} = \boldsymbol{0}$$

となり，1 次独立性により $x_1 - \widetilde{x}_1 = 0, \cdots, x_n - \widetilde{x}_n = 0$ が得られるからである．結局，式 (2) におけるスカラー $x_1, \cdots, x_n$，すなわち式 (1) の解は一意的に定まる．

(c) $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \widetilde{\boldsymbol{A}} = r < n$ ならば，1.4 節の定理 1 により r 個の $\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な列ベクトルの組 K が存在し，ほかの $n-r$ 個の列ベクトルはこれらの列ベクトルの 1 次結合として与えられる．ここで，列ベクトルおよび未知数の番号をつけかえて $\widehat{\ }$ で表し，$\{\widehat{\boldsymbol{c}}_{(1)}, \cdots, \widehat{\boldsymbol{c}}_{(r)}\}$ が上の K になるようにしよう．すると式 (2) は

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{(1)}\widehat{x}_1 + \cdots + \widehat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\widehat{x}_n = \boldsymbol{b}$$

と書きかえられる．$\widehat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}, \cdots, \widehat{\boldsymbol{c}}_{(n)}$，したがって $\widehat{x}_{r+1}\widehat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}, \cdots, \widehat{x}_n\widehat{\boldsymbol{c}}_{(n)}$ は K のベクトルの 1 次結合である．これらのベクトルを K のベクトルで表し各項をまとめると，

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{(1)}y_1 + \cdots + \widehat{\boldsymbol{c}}_{(r)}y_r = \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

ただし，$y_j = \widehat{x}_j + \beta_j \ (j = 1, \cdots, r)$ であって，β_j は $\widehat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\widehat{x}_{(r+1)}, \cdots, \widehat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\widehat{x}_n$ に由来する項である．連立方程式は少なくとも 1 つの解をもつので，式 (3) を満足する $y_1, \cdots, y_r$ が存在する．K の 1 次独立性によりスカラー $y_1, \cdots, y_r$ は一意的に定まる．それゆえ，$\widehat{x}_{r+1}, \cdots, \widehat{x}_n$ を任意に選んだとき，β_j および対応する $\widehat{x}_j = y_j - \beta_j \ (j = 1, \cdots, r)$ が確定する．

(d) これは 1.3 節で証明された結果を改めて述べたものにすぎない． ◀

定理 1 は，1.3 節の例によって具体的に説明される．例 3 では，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \widetilde{\boldsymbol{A}} = 2 < n = 4$ であり，x_3 と x_4 を任意に選ぶことができる．例 4 では，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \widetilde{\boldsymbol{A}} = n = 3$ となるためただ 1 組の解が存在する．また例 5 では，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2 < \operatorname{rank} \widetilde{\boldsymbol{A}} = 3$ であるから解は存在しない．

同次連立 1 次方程式

連立 1 次方程式 (1) は，右辺のすべての b_j が 0 のときには**同次**とよばれ，そうでないときには**非同次**とよばれる (1.3 節)．基本定理からただちにつぎの結果が得られる．

定理 2 (同次方程式) 同次連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

は必ず**自明な解** $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$ をもつ．自明でない解は $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ が n より小さいときに，またそのときに限って存在する．もし $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r < n$ ならば，

これらの解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とともに $n - r$ 次元のベクトル空間 (1.4 節) を構成する．このベクトル空間を式 (4) の**解空間**という．

とくに，$\boldsymbol{x}_{(1)}$ と $\boldsymbol{x}_{(2)}$ が式 (4) の解ベクトルならば，c_1 および c_2 を任意のスカラーとするとき，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_{(1)} + c_2\boldsymbol{x}_{(2)}$ もまた式 (4) の解ベクトルである．(これは非同次の場合には成立しない．解空間という用語も同次の場合だけに使われる.)

[証明]　最初の命題は明らかであって，同次方程式に対しては係数行列と拡大行列が同じ階数をもつという事実に対応している．$\boldsymbol{x}_{(1)}, \boldsymbol{x}_{(2)}$ を解ベクトルとすると，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0}$ であり，しかもこれから $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{x}_{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{A}(c\,\boldsymbol{x}_{(1)}) = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ (c は任意定数) が得られるので，解ベクトルはベクトル空間を構成する．rank $\boldsymbol{A} = r < n$ ならば，基本定理 1(c) により，適当な $n - r$ 個の未知数たとえば $x_{r+1}, \cdots, x_n$ の値をまったく任意に選んで，残りのすべての未知数 $x_1, \cdots, x_r$ の値を決定することができる．この場合，式 (4) の解空間の基底すなわち**解の基底**は $\boldsymbol{y}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}_{(n-r)}$ であって，解ベクトル $\boldsymbol{y}_{(j)}$ は $x_{r+j} = 1$ かつそれ以外の $x_{r+1}, \cdots, x_n$ を 0 にとることによって得られ，その結果対応する $x_1, \cdots, x_r$ の値が定まるわけである．結局，式 (4) の解空間の次元は $n - r$ であることが示され，証明が終わる．◀

式 (4) の解空間は係数行列 $\boldsymbol{A}$ の**零空間**ともよばれる．解空間中のすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるからである．また，零空間の次元を $\boldsymbol{A}$ の**退化次数**とよび，nul $\boldsymbol{A}$ と書く．これらの概念を用いれば，定理 2 は

$$\boxed{\operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{nul} \boldsymbol{A} = n} \tag{5}$$

という結果を述べている．ここで，n は未知数の個数すなわち $\boldsymbol{A}$ の列の数を表す．

定義によれば，式 (4) において rank $\boldsymbol{A} = r \leqq m$ であり，したがって $m < n$ のとき $r < n$ がなりたつ．このことと定理 2 から実用上重要なつぎの定理が導かれる．

定理 3 (未知数の個数より少数の方程式からなる連立方程式)　未知数の個数よりも方程式の数が少ない同次連立 1 次方程式はつねに自明でない解をもつ．

非同次連立 1 次方程式

非同次連立 1 次方程式の解の特性はつぎのように要約される．

定理 4 (非同次方程式)　式 (1) で与えられる非同次連立 1 次方程式に解が存在するとき，そのすべての解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_h$$

の形で表される．ただし，$\boldsymbol{x}_0$ は式 (1) の任意に指定された1つの解であり，$\boldsymbol{x}_h$ としては対応する同次方程式 (4) のすべての解をとるものとする．

［証明］ $\boldsymbol{x}$ を式 (1) の任意の解とし，$\boldsymbol{x}_0$ を式 (1) の任意に指定された1つの解とする．このとき $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{b}$ であるから，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{0}.$$

ゆえに，式 (1) の任意の解 $\boldsymbol{x}$ と指定された1つの解 $\boldsymbol{x}_0$ との差を $\boldsymbol{x}_h$ とすると，$\boldsymbol{x}_h$ は同次方程式 (4) の解である．したがって，$\boldsymbol{x}_h$ として式 (4) のすべての解をとることによって，式 (1) のすべての解が得られる．これで定理は証明された． ◀

1.6 行列式，クラメールの公式

行列式はもともと連立1次方程式を解くために導入された．数値計算に不向きな難点[9]はあるにせよ，行列式は固有値問題 (2.1節)，微分方程式 (第1巻2, 3章)，ベクトル解析 (3.3節) などで工学的に広く応用されている．行列式の導入にはいろいろな流儀がある．ここで記述される定義は連立1次方程式に関連してとくに実際的なものである．

n 次の行列式は $n \times n$ 正方行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ に関連するある数式である．まず $n = 2$ の場合からはじめよう．

2次の行列式

2次の行列式はつぎのような記号を用いて定義される．

$$D = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (\mathbf{1})$$

ここでは行列の括弧のかわりに縦線が使われている．

例1 2次の行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14.$$ ◀

例2 2式からなる連立1次方程式に対するクラメールの公式[10] 連立1次方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \qquad (2a)$$

9) 数値計算では1.3節や第5巻2.1–2.3節で述べる方法が使われ，クラメールの公式は使われていない．

10) Gabriel Cramer (1704–1752)，スイスの数学者．

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{2b}$$

の解の公式を導け．

［解］　x_2 を消去するために，式 (2a) に a_{22} を掛け，式 (2b) に $-a_{12}$ を掛けて加えると，

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

さらに x_1 を消去するために，式 (2a) に $-a_{21}$ を掛け，式 (2b) に a_{11} を掛けて加えると，

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ と仮定すれば，この 2 つの方程式は D で割ることができる．右辺も行列式を使って書きなおした結果は

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D}. \tag{3}$$

これが $n = 2$ のときの方程式 (2) に対する**クラメールの公式**である．

例として，

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 12, \\ 2x_1 + 5x_2 &= -8 \end{aligned} \quad \text{ならば，} \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{84}{14} = 6, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-56}{14} = -4$$

である．

連立 1 次方程式 (2) が同次 ($b_1 = b_2 = 0$) で $D \neq 0$ のときには，自明な解 $x_1 = x_2 = 0$ だけが存在する．$D = 0$ ならば自明でない解も存在する．◀

3 次の行列式

3 次の行列式はつぎのように定義される．

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

右辺の符号は $+ - +$ である．右辺の各項は D の第 1 列の成分にその“**小行列式**”を掛けたものである．ただし，小行列式とは D からその成分の属する行と列を除く (たとえば成分 a_{11} の場合には第 1 行と第 1 列を除く) ことによって得られる 2 次の行列式を意味する．

これらの小行列式をさらに展開すると，

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22} \tag{4*}$$

を得る．

例 3　**3 式からなる連立 1 次方程式に対するクラメールの公式**　3 個の未知数をもつ 3 つの 1 次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned} \tag{5}$$

に対しては，**クラメールの公式**はつぎの形で表される．

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D} \qquad (D\neq 0). \tag{6}$$

ただし，D は式 (4) で与えられる“連立方程式の行列式”であり，

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

である．これは例 2 と同様な消去法で導くこともできるが，一般の n に対するクラメールの公式の説明にうつろう．◀

任意次数 n の行列式

任意の**次数** n **の行列式**は，$n\times n$ 正方行列 $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ に関連するスカラーであって，

$$D=\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{vmatrix} \tag{7}$$

と書く．$n=1$ のときには

$$D=a_{11} \tag{8}$$

と定める．$n\geqq 2$ に対しては

$$\boxed{D=a_{j1}C_{j1}+a_{j2}C_{j2}+\cdots+a_{jn}C_{jn}} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{9a}$$

または

$$\boxed{D=a_{1k}C_{1k}+a_{2k}C_{2k}+\cdots+a_{nk}C_{nk}} \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{9b}$$

と定義する．ここで C_{jk} は

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$$

によって与えられる．M_{jk} は $n-1$ 次の行列式であって，$\boldsymbol{A}$ の成分 a_{jk} の属する行と列を除いて (第 j 行と第 k 列を除いて) 得られる $\boldsymbol{A}$ の小行列の行列式である．

このようにして，D は n 個の $n-1$ 次行列式によって定義されるが，個々の $n-1$ 次行列式はまた $n-1$ 個の $n-2$ 次行列式によって定義される．この操作を繰り返せば，結局 D はいくつかの 2 次の行列式，さらにただ 1 つの数に帰着することになる．

上記の定義においては，D はどの行あるいはどの列について**展開**してもよいわけである．いいかえれば，式 (9) における行と列の選び方や C_{jk} の展開の仕方はまったく任意である．

この定義は**確定的**である．すなわち，どの行あるいはどの列についての展開からも同一の D の値が得られる．証明は付録 4 にある．

行列式に関連する用語は行列の用語からとられている．D には n^2 個の**成分**または要素，n 個の行，n 個の列，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ からなる**主対角線**がある．つぎの 2 つは行列式特有の新しい用語である．M_{jk} は D における a_{jk} の**小行列式**とよばれ，C_{jk} は D における a_{jk} の**余因子**とよばれる．

あとで利用するために，小行列式を使って式 (9) を書きかえておく．

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n), \tag{10a}$$

$$D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{10b}$$

例 4 **3 次の行列式の小行列式と余因子**　式 (4) で定義された 3 次の行列式 D の第 1 行の成分に対する小行列式と余因子は式 (4) からすぐわかる．第 2 行の成分については，小行列式は

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

であり，余因子は $C_{21} = -M_{21}$，$C_{22} = +M_{22}$，$C_{23} = -M_{23}$ である．第 3 行の成分の小行列式や余因子については読者に任せよう．C_{jk} の符号を格子縞状のパターンで描くとつぎのようになる．

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

◀

例 5　3 次の行列式の展開

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(12-0) - 3(4+4) + 0(0+6) = -12.$$

これは第 1 行による展開である．第 3 列による展開は

$$D = 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 = -12.$$

ほかの 4 通りの展開でも同じ値 -12 が得られることを確かめよ．◀

例 6　3 角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot 5 = -60.$$

これを参考にして，3 角行列の行列式の値を与える公式を導けないか．対角行列の場合はどうか．◀

行列式の一般的性質

定理 1　(基本行変形に関連した n 次の行列式の性質)

(a)　2 つの行を入れかえると，行列式の値は -1 倍される．

(b)　ある行の定数倍をほかの行に加えても，行列式の値は変わらない．

(c)　ある行を c 倍すると，行列式の値も c 倍される．

［証明］　(a)　証明は数学的帰納法による．$n = 2$ の場合には，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

により命題がなりたつことがわかる．$n-1$ 次の行列式について (a) が成立すると仮定して，n 次の行列式についても成立することを示そう．D を n 次の行列式，E を D の 2 つの行を入れかえた行列式とする．交換を行っていない 1 つの行を第 j 行と名づけ，D と E を第 j 行について展開する．式 (10a) を適用すれば，

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk}, \qquad E = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} N_{jk}. \tag{11}$$

ただし，N_{jk} は D の a_{jk} に対する小行列式 M_{jk} から D で交換された 2 つの行を交換することによって得られる．これらの小行列式は $n-1$ 次であるから，帰納法の仮定により $N_{jk} = -M_{jk}$ がなりたつ．したがって式 (11) から $E = -D$ となる．

(b)　第 j 行に第 i 行の c 倍を加えた新しい行列式を $\widetilde{D}$ と記す．その第 j 行の成分は $a_{jk} + ca_{ik}$ である．$\widetilde{D}$ をこの第 j 行について展開すれば，$\widetilde{D} = D_1 + cD_2$ と書けること

がわかる．ここで $D_1 = D$ は第 j 行に成分 a_{jk} をもち，D_2 は第 j 行に成分 a_{ik} をもつ．ゆえに D_2 の第 j 行と第 i 行は相等しい．これらの 2 行を入れかえても D_2 は変わらないが，(a) によれば D_2 は $-D_2$ に変わるはずである．結局，$D_2 = -D_2 = 0$，すなわち $\widetilde{D} = D_1 = D$ が得られる．

(c) c 倍された行について行列を展開すればよい． ◀

［注意］ $\det(k\boldsymbol{A})$ は $k^n \det \boldsymbol{A}$ に等しい ($k \det \boldsymbol{A}$ ではない)．その理由を説明せよ．

例 7 3 角型に帰着させる行列式の計算 定理 1 によれば，行列に対するガウス消去法と同様な方法で，行列式を 3 角型に変換してその値を求めることができる．

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \text{第 2 行 } -2\times \text{ 第 1 行} \\ \\ \text{第 4 行 } +1.5\times \text{ 第 1 行} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & -11.4 & 29.2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 3 行 } -0.4\times \text{ 第 2 行} \\ \text{第 4 行 } -1.6\times \text{ 第 2 行} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & 0 & 47.25 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 4 行 } +4.75\times \text{ 第 3 行} \end{matrix}$$

$$= 2 \times 5 \times 2.4 \times 47.25 = 1134.$$ ◀

定理 2 (n 次の行列式のほかの性質)

(a)–(c) 定理 1 の (a)–(c) は列に対しても適用される．

(d) 転置しても行列式の値は変わらない．

(e) ある行またはある列の成分がすべて 0 である行列式の値は 0 である．

(f) 2 つの行 (または 2 つの列) において対応する成分が比例しているとき，この行列式の値は 0 である．とくに，2 つの行 (または 2 つの列) の成分が同じ行列式の値は 0 である．

［証明］ (a)–(e) 行列式が任意の行あるいは任意の列によって展開できることからただちに導かれる．ただし，(d) では転置は行列と同様に定義される．すなわち，第 j 行は転置によって第 j 列に移る．

(f)　第 j 行が第 i 行の c 倍に等しい行列 D は，第 j 行が第 i 行と一致する行列 D_1 を用いて，$D = cD_1$ と書くことができる．第 j 行と第 i 行を交換しても D_1 は変わらないが，一方では定理 1 (a) により $-D_1$ に変わる．したがって $D_1 = 0$，$D = cD_1 = 0$ となる．列についても同様である．◀

階数の行列式による表現

1.4 節で述べたように，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数は，1 次独立な行ベクトルまたは列ベクトルの最大数として定義された．この重要な階数の概念が，行列式によって特徴づけられることはまさに驚異的である．(行列式はときには階数の定義にも使われる．)　ここでは $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} > 0$ と仮定する．(1.4 節に示されているように $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 0$ は $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ を意味するからである．)

定理 3 (階数の行列式による表現)　$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ が階数 $r \geqq 1$ をもつための必要かつ十分な条件は，$\boldsymbol{A}$ の $r \times r$ 正方小行列で 0 でない行列式をもつものが少なくとも 1 つはあるが，行数が $r+1$ 以上の正方小行列があったとしてもそれらの行列式はすべて 0 になることである．

とくに $\boldsymbol{A}$ が $n \times n$ 正方行列ならば，

$$\det \boldsymbol{A} \neq 0$$

のときまたそのときに限って $\boldsymbol{A}$ は階数 n をもつ．

［証明］　証明の鍵は基本行変形 (1.3 節) に関するつぎの事実にある．基本行変形は 1.4 節の定理 3 により行列の階数を変えないが，それだけでなく本節の定理 1 により行列式が 0 か 0 でないかという性質も変えない．$\boldsymbol{A}$ の階段形 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ (1.3 節) は $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$ のときに，またそのときに限り r 個の $\boldsymbol{0}$ でない行ベクトル (これが $\widehat{\boldsymbol{A}}$ の最初の r 個の行ベクトルにほかならない) をもつ．$\widehat{\boldsymbol{R}}$ を $\widehat{\boldsymbol{A}}$ の最初の r 行と最初の r 列からなる $r \times r$ 小行列とする．$\widehat{\boldsymbol{R}}$ は 3 角行列であってすべての対角成分 r_{jj} が 0 でないから，$\det \widehat{\boldsymbol{R}} = r_{11} \cdots r_{rr} \neq 0$ がいえる．$\widehat{\boldsymbol{R}}$ は $\boldsymbol{A}$ の $r \times r$ 小行列 $\boldsymbol{R}$ に基本行変形を施して得られるので，対応する $\boldsymbol{R}$ についても $\det \boldsymbol{R} \neq 0$ がなりたつ．同様に，$\boldsymbol{A}$ に $r+1$ 個以上の行数の正方小行列 $\boldsymbol{S}$ が含まれる場合には $\det \boldsymbol{S} = 0$ である．なぜならば，$\boldsymbol{S}$ に対応する $\widehat{\boldsymbol{A}}$ の小行列 $\widehat{\boldsymbol{S}}$ は，行ベクトルとして零ベクトルを含んでいるはずであり (そうでなければ $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} \geqq r+1$ となってしまう)，その結果定理 2 により $\det \boldsymbol{S} = 0$ が得られるからである．これで $m \times n$ 行列に関する定理の主張が証明された．

とくに $\boldsymbol{A}$ が $n \times n$ 正方行列のときには，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ は $\boldsymbol{A}$ に含まれる $n \times n$ 小行列が 0 でない行列式をもつことと同値である．このような小行列は $\boldsymbol{A}$ 自身しかないので，$\det \boldsymbol{A} \neq 0$ が確かめられる．◀

クラメールの公式

定理 3 から出発して，連立 1 次方程式の解を行列式の商として表現する一般

のクラメールの公式を導くことができる．クラメールの公式は数値計算法としては実際的でない (数値計算には 1.3 節，第 5 巻 2.1–2.3 節の方法が適切) が，工学的な応用の多い微分方程式論 (第 1 巻 2.10, 2.15 節) などにおいて重要である．

定理 4 (クラメールの定理：行列式による連立 1 次方程式の解の表現)

(a) n 個の未知数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する n 個の連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{12}$$

は，その行列式 $D = \det \boldsymbol{A}$ が 0 でないときにはただ 1 組の解をもつ．この解は公式

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \quad \text{(クラメールの公式)} \tag{13}$$

によって与えられる．ここで，D_k は D の第 k 列を $b_1, \cdots, b_n$ でおきかえて得られる行列式である．

(b) ゆえに，連立 1 次方程式 (12) が同次で $D \neq 0$ ならば，式 (12) は自明な解 $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0$ のみをもつ．また同次で $D = 0$ ならば，式 (12) は別に自明でない解をもつ．

[証明]　連立 1 次方程式 (12) の拡大行列 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ は $n \times (n+1)$ 行列である．その階数は多くとも n である．いま，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{14}$$

ならば $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$，したがって $\operatorname{rank} \widehat{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ である．1.5 節の基本定理 (定理 1) から，連立 1 次方程式は一意的な解をもつことがわかる．

つぎに式 (13) を証明しよう．D を第 k 列で展開すると，

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk}. \tag{15}$$

ここで，C_{ik} は D における成分 a_{ik} の余因子である．D の第 k 列の成分をほかの数でおきかえれば，新しい行列式 $\widetilde{D}$ が得られる．明らかに，$\widetilde{D}$ の第 k 列についての展開は，式 (15) の余因子をそのままにして $a_{1k}, \cdots, a_{nk}$ を新しい成分でおきかえたものである．とくに，新しい成分として D の第 l 列 ($l \neq k$) の成分 $a_{1l}, \cdots, a_{nl}$ をとると，$\widetilde{D}$ は 2 つの同じ列をもつから定理 2 (f) により 0 になる．その結果，

$$a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk} = 0 \qquad (l \neq k). \tag{16}$$

式 (12) の 1 番目の方程式に C_{1k}，2 番目の方程式に C_{2k}，$\cdots$，最後の方程式に C_{nk} を掛けて加えると，

$$\begin{aligned} &C_{1k}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + C_{nk}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n) \\ &\quad = b_1C_{1k} + \cdots + b_nC_{nk}. \end{aligned} \tag{17}$$

左辺を整理した結果は

$$x_1(a_{11}C_{1k} + a_{21}C_{2k} + \cdots + a_{n1}C_{nk}) + \cdots + x_n(a_{1n}C_{1k} + a_{2n}C_{2k} + \cdots + a_{nn}C_{nk})$$

となる．この中の x_k の係数は

$$a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk}$$

であって，式 (15) により D に等しい．また x_l の係数は

$$a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk}$$

であって，式 (16) により $l \neq k$ のとき 0 である．それゆえ，式 (17) の左辺は x_kD に等しくなり，

$$x_kD = b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}$$

が導かれる．右辺は定理で定義された D_k の第 k 列による展開を意味するので，これを D で割れば式 (13) が得られる．これでクラメールの公式が証明された．

式 (12) が同次で $D \neq 0$ のときには，個々の D_k に成分がすべて 0 の列が存在するため，定理 2 (e) により $D_k = 0$ となり，式 (13) は自明な解を与える．

最後に，式 (12) が同次で $D = 0$ ならば，定理 3 により $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n$ となるので，1.5 節の定理 2 から自明でない解も存在することがわかる． ◀

定理 4 の説明はすでに例 2 と例 3 に与えられている．定理 4 の重要な応用は次節で示される．

❖❖❖❖❖ 問題 1.6 ❖❖❖❖❖

1. **(2 次の行列式)** 式 (1) を可能な 4 通りの方法で展開し，結果がすべて一致することを示せ．

2. **(3 次の行列式)** 例 5 の行列式 D の展開をすべての行と列について行え．さらに 3 角型への変換により D を計算せよ．

3. **(行列式，余因子)** 例 4 の小行列式と余因子の表をつくれ．

4. **[論文プロジェクト] 行列式の一般的性質** 適当に選んだ実例を用いて定理 1 と定理 2 の各命題を説明せよ．

行列式の計算 つぎの行列式の値を求めよ．

5. $\begin{vmatrix} 3.8 & 0.6 \\ -1.4 & 9.3 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 104 & 624 \\ 102 & 612 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 205 & 16 & 81 \\ 0 & -13 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} m & n & p \\ p & m & n \\ n & p & m \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 36 & 18 & 6 \\ 87 & 12 & -45 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \end{vmatrix}$ **13.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

行列式による階数の計算　定理 3 により階数を求めよ．基本行変形による階数決定法 (1.4 節の例 6) を用いてこの結果を確認せよ．(計算の詳細を示せ.)

14. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -6 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 21 & -3 & 17 & 13 \\ 46 & 11 & 52 & 14 \\ 33 & 48 & 71 & -23 \end{bmatrix}$

クラメールの公式　つぎの連立 1 次方程式をクラメールの公式によって解き，ガウス消去法によって確かめよ．

17. $\begin{aligned} 5x - 3y &= 37, \\ -2x + 7y &= -38 \end{aligned}$ **18.** $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 20, \\ 7x + 3y + z &= 13, \\ x + 6y + 2z &= 0 \end{aligned}$ **19.** $\begin{aligned} 3x + 7y + 8z &= -13, \\ 2x + 9z &= -5, \\ -4x + y - 26z &= 2 \end{aligned}$

20. ［協同プロジェクト］ **幾何学的応用：与えられた点を通る曲線と曲面**　この問題の趣旨は，同次連立 1 次方程式が自明でない解をもつための条件として，その係数のつくる行列式が 0 となるような方程式を見いだすことである．与えられた 2 点 $P_1 : (x_1, y_1)$ および $P_2 : (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式を求める場合について説明する．この未知の直線がたとえば $ax + by + c = 0$ で表されるとしよう．自明でない解 a, b, c が存在するためには，係数 $x, y, 1$ のつくる行列式が 0 でなければならない．未知数 a, b, c に関する連立 1 次方程式は

$$\begin{aligned} ax + by + c \cdot 1 &= 0 \quad &&(\text{直線 } L \text{ 上で}), \\ ax_1 + by_1 + c \cdot 1 &= 0 \quad &&(L \text{ 上の点 } P_1 \text{で}), \\ ax_2 + by_2 + c \cdot 1 &= 0 \quad &&(L \text{ 上の点 } P_2 \text{で}) \end{aligned} \tag{18}$$

となる．

(a) **2 点を通る直線**　式 (18) に対する行列式 $D = 0$ からよく知られた公式

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

を導け．

(b) **平面**　与えられた 3 点を通る平面に対して式 (18) に相当する公式を見いだし，3 点が (1, 1, 1)，(3, 2, 6)，(5, 0, 5) である場合に適用せよ．

(c) **円**　与えられた 3 点を通る平面上の円について同様な公式を見いだせ．3 点 (2, 6)，(6, 4)，(7, 1) を通る円の方程式を定めて図示せよ．

(d) **球**　与えられた 4 点を通る球に対して (c) と類似の公式を見いだせ．4 点 (0, 0, 5)，(4, 0, 1)，(0, 4, 1)，(0, 0, −3) を通る球の方程式をこの公式か視察によって求めよ．

(e) **一般の円錐曲線**　6 次の行列式を利用して一般の円錐曲線に対する公式を見いだせ．放物線と任意に選んだ別の円錐曲線について具体的に計算せよ．

1.7 逆行列，ガウス・ジョルダン消去法

本節では正方行列だけを扱うことにする．

$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ の**逆行列** $\boldsymbol{A}^{-1}$ とは，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{1}$$

を満足する $n \times n$ 行列のことである．ここで $\boldsymbol{I}$ は $n \times n$ 単位行列である (1.2 節).

$\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在する場合には $\boldsymbol{A}$ を**正則行列**といい，逆行列が存在しない場合には**特異行列**という．

$\boldsymbol{A}$ が逆行列をもつとき逆行列は一意的に定まる．実際，2 つの行列 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ がともに $\boldsymbol{A}$ の逆行列であるとすれば，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ かつ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，したがって

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}$$

が成立し，一意性が確かめられる．

つぎに，$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が可能な最大の階数 n をもつとき，またそのときに限り逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在することを証明しよう．この証明では，$\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する限り $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ であることも示される[11)]．これは逆行列が 1 次変換に関連して特徴づけられることを意味している．

定理 1 (逆行列の存在)　$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ のときに，またそのときに限って存在する．ゆえに，$\boldsymbol{A}$ は $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ ならば正則で，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n$ ならば特異である．

[証明]　連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2}$$

を考える．ただし $\boldsymbol{A}$ は係数行列である．逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するときには，両辺に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛ければ，

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

これは式 (2) が一意的な解 $\boldsymbol{x}$ をもつことを示すから，1.5 節の基本定理 (定理 1) により $\boldsymbol{A}$ の階数は n である．

逆に $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ とすると，同じ定理により式 (2) は任意の $\boldsymbol{b}$ に対してただ 1 つの解 $\boldsymbol{x}$ をもつ．ガウス消去法 (1.3 節) に続く後退代入の結果，$\boldsymbol{x}$ の成分 x_j は $\boldsymbol{b}$ の成分の 1 次結合で表されるため，

---

11) これは $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の数値的な解法ではない．ガウス消去法よりも多い計算量を必要とするからである．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b} \tag{3}$$

と書くことができる．これを式 (2) に代入すれば，任意の $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \qquad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

がなりたつ．したがって $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ となり，$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$ が存在することがわかる． ◀

逆行列の決定

$n \times n$ 正則行列の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を決定する実際的な方法は，ガウス消去法を少し改良した**ガウス・ジョルダン**[12)]**消去法**である．この方法の考え方はつぎのとおりである．

まず $\boldsymbol{A}$ を使って n 個の連立 1 次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{e}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(n)} = \boldsymbol{e}_{(n)}$ を構成する．ただし，$\boldsymbol{e}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{(n)}$ は $n \times n$ 単位行列の列ベクトルである．これは n 個の未知ベクトル $\boldsymbol{x}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{(n)}$ に関する n 個の連立ベクトル方程式である．列ベクトル $\boldsymbol{x}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{(n)}$ からなる未知の行列 $\boldsymbol{X}$ を用いると，連立ベクトル方程式を単一の行列方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ にまとめることができる．同様に，n 個の拡大行列 $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{e}_{(1)}], \cdots, [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{e}_{(n)}]$ も "広義の拡大行列" $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$ にまとめられる．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛ければ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}$ が得られる．ゆえに，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ を $\boldsymbol{X}$ について解くために，ガウス消去法を $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$ に適用することができる．ガウス消去法は連立方程式を 3 角型に変換するので，$[\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{H}]$ の形の行列 ($\boldsymbol{U}$ は上 3 角行列) を扱わなければならない．ガウス・ジョルダン法では，$\boldsymbol{U}$ にさらに基本行変形を施して対角行列，最終的には単位行列 $\boldsymbol{I}$ に到達する．これは $\boldsymbol{U}$ の主対角線より上側の成分を消去し対角成分をすべて 1 にすることによって実現される (例 1)．もちろん，この操作は $\boldsymbol{U}$ だけでなく全体の行列 $[\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{H}]$ にもはたらき，$\boldsymbol{H}$ をある行列 $\boldsymbol{K}$ に変え，全体の行列 $[\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{H}]$ を $[\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{K}]$ に変える．これが $\boldsymbol{I}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}$ の "広義の拡大行列" である．すでに述べたように $\boldsymbol{I}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ であり，比較により $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^{-1}$ が得られるので，$\boldsymbol{A}^{-1}$ は $[\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{K}]$ から直接読みとることができる．

つぎの実例はガウス・ジョルダン消去法の詳細を具体的に示している．

例 1　**逆行列，ガウス・ジョルダン消去法**　つぎの行列の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

---

12) Wilhelm Jordan (1842–1899)，ドイツの数学者，測地学者．American Mathematical Monthly **94** (1987), 130–142 を参照せよ．

ガウス・ジョルダン消去法は連立 1 次方程式の解法としては推奨されない．ガウス消去法に追加される操作の計算量は後退代入の計算量よりも多いからである．第 5 巻 2.1 節を参照せよ．

［解］　まずガウス消去法 (1.3 節) を適用する．

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \text{第 2 行 } +3\times \text{ 第 1 行} \\ \text{第 3 行 } - \text{ 第 1 行} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 3 行 } - \text{ 第 2 行} \end{array}$$

これはガウス消去法によって得られた $[\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{H}]$ であって，$\boldsymbol{U}$ は 1.3 節の例 4 と一致する．このあとはガウス・ジョルダン消去法で追加されるステップであって，$\boldsymbol{U}$ を $\boldsymbol{I}$ すなわち成分 1 の対角行列に変換する．

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -1\times \text{ 第 1 行} \\ 0.5\times \text{ 第 2 行} \\ -0.2\times \text{ 第 3 行} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{第 1 行 } +2\times \text{ 第 3 行} \\ \text{第 2 行 } -3.5\times \text{ 第 3 行} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{第 1 行 } + \text{ 第 2 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

最後の 3 列が $\boldsymbol{A}^{-1}$ を構成する．検算すると，

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

よって $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ である．同様に $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ も確かめられる．　◀

逆行列に関する有用な公式

つぎの定理の公式 (4) は (単なる逆行列の数値計算ではない) 理論的研究学習においてしばしば有用である．実際，$n = 2$ の特別な場合は幾何学的応用などによく現れる．

定理 2 (逆行列) $n \times n$ 正則行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ の逆行列は，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}[A_{jk}]^T = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

で与えられる．ただし，A_{jk} は $\det \boldsymbol{A}$ における a_{jk} の余因子 (1.6 節) である．$\boldsymbol{A}^{-1}$ における A_{jk} は $\boldsymbol{A}$ における a_{kj} (a_{jk} ではない) と同じ位置にあることを注意したい．

とくに 2×2 正則行列の場合には，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ のとき } \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{4*}$$

[証明] 式 (4) の右辺を $\boldsymbol{B}$ で表して $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ であることを示そう．いま

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{G} = [g_{kl}] \tag{5}$$

と書くと，行列の積の定義から

$$g_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \frac{A_{sk}}{\det \boldsymbol{A}} a_{sl} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(a_{1l}A_{1k} + \cdots + a_{nl}A_{nk}) \tag{6}$$

が得られる．1.6 節の式 (15), (16) によれば，右辺の括弧内の和は $l = k$ のとき $D = \det \boldsymbol{A}$ に等しく，$l \neq k$ のとき 0 である．したがって，

$$g_{kk} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \det \boldsymbol{A} = 1, \qquad g_{kl} = 0 \quad (l \neq k).$$

結局，式 (5) は $\boldsymbol{G} = [g_{kl}] = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ となる．同様にして $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ もなりたつ．これで $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ が証明された．

とくに $n = 2$ ならば，式 (4) の第 1 行から $A_{11} = a_{22}$，$A_{21} = -a_{12}$，また第 2 行から $A_{12} = -a_{21}$，$A_{22} = a_{11}$ が得られる．これは式 (4*) を与える． ◀

例 2 2 × 2 行列の逆行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}.$$ ◀

例 3 例 1 の行列による定理 2 の検証 式 (4) を使って，例 1 の行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

の逆行列を求めよ．

［解］ $\det \boldsymbol{A} = -1(-7) - 13 + 2 \cdot 8 = 10.$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

この結果はもちろん例 1 と一致する． ◀

対角行列の逆行列　対角行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$，すなわち $j \neq k$ に対して $a_{jk} = 0$ である $n \times n$ 行列は，すべての $a_{jj} \neq 0$ のときまたそのときに限り逆行列をもつ．逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は成分 $1/a_{11}, \cdots, 1/a_{nn}$ をもつ対角行列である．式 (4) においてたとえば

$$\frac{A_{11}}{D} = \frac{a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}} = \frac{1}{a_{11}}$$

となるからである．

例 4　**対角行列の逆行列**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ ◀

積の逆行列　行列の積の逆行列は各因子の逆行列を反対の順序に掛けて求められる．

$$(\boldsymbol{AC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{7}$$

3 つ以上の行列の積については，

$$(\boldsymbol{AC} \cdots \boldsymbol{PQ})^{-1} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} \cdots \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{8}$$

［証明］ 式 (1) の $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{AC}$ でおきかえて，

$$\boldsymbol{AC}(\boldsymbol{AC})^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛けて $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ を用いると，

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{AC})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

これに左から $\boldsymbol{C}^{-1}$ を掛けると式 (7) が得られる．式 (8) を証明するには数学的帰納法を使えばよい． ◀

逆行列の逆行列は与えられた行列自身であること，すなわち

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \tag{9}$$

を注意したい．証明は簡単なので読者に任せる．

行列の階数と簡約法則

行列の積には数の積とは異なる特徴がある．よく知られた数の演算法則との相違点を注意深く吟味しなければならない．

[**1**] 交換法則は成立せず，一般には

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

である．

[**2**] $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ であっても $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0})$ のどれかがなりたつとは限らない．たとえば

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[**3**] $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD}$ であっても必ずしも $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ とは限らない ($\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ の場合でさえ).

実用上重要な以上の性質についてはすでに 1.2 節で述べた．しかし，1.2 節ではまだ定義されていなかった行列の階数と逆行列の概念を使えば，簡約法則 ([2]，[3]) の適用範囲を説明することができる．

定理 3 (簡約法則)　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を $n \times n$ 行列とする．

(a) $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ で $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ ならば $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ である．

(b) $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ で $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ である．したがって，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ で $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n$ と $\operatorname{rank} \boldsymbol{B} < n$ がなりたつ．

(c) $\boldsymbol{A}$ が特異ならば $\boldsymbol{BA}$ も $\boldsymbol{AB}$ も特異である．

［証明］ (a) $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ ならば定理 1 により $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する．$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ の両辺に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛けると $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ が得られる．

(b) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ の両辺に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛ければよい．

(c_1) $\boldsymbol{A}$ が特異ならば定理 1 により $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n$ であるから，1.5 節の定理 2 により $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解をもつ．この解は $\boldsymbol{BAx} = \boldsymbol{0}$ を満足するので，1.5 節の定理 2 により $\operatorname{rank}(\boldsymbol{BA}) < n$ であり，定理 1 により $\boldsymbol{BA}$ は特異行列となる．

(c_2) $\boldsymbol{A}^T$ は 1.6 節の定理 2 (d) により特異であり，$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ もまた上記の (c_1) により特異である．ところが，1.2 節の式 (5) から $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{AB})^T$ がなりたつので，$\boldsymbol{AB}$ も 1.6 節の定理 2 (d) により特異である． ◀

行列の積の行列式

行列の積の行列式は各因子の行列式の積として表される．この興味深い公式はしばしば必要とされる．ここでは，ガウス・ジョルダンの対角化 (例 1) と証明したばかりの定理 3 を使った証明を与えよう．

定理 4 (行列の積の行列式) 任意の $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して，

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B} \tag{10}$$

が成立する．

[証明] $\boldsymbol{A}$ が特異ならば，定理 3 (c) により $\boldsymbol{AB}$ もまた特異である．この場合には，1.6 節の定理 3 により $\det \boldsymbol{A} = 0$, $\det(\boldsymbol{AB}) = 0$ が得られる．したがって式 (10) は $0 = 0$ となり，命題は真である．

つぎに $\boldsymbol{A}$ を正則とする．$\boldsymbol{A}$ はガウス・ジョルダンの対角化[13]によって対角行列 $\widehat{\boldsymbol{A}} = [\widehat{a}_{jk}]$ に帰着される．1.6 節の定理 1 (a), (b) ((c) は除く) によれば，$\det \boldsymbol{A}$ は基本行変形 (b) を施してもその値を変えず，(a) を施せば符号が逆転する．いずれにせよ，これらの対角化の操作は $\boldsymbol{AB}$ を $\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ に変換し，$\det(\boldsymbol{AB})$ にも同じ効果を及ぼす．ゆえに，行列

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widehat{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \widehat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11}b_{11} & \widehat{a}_{11}b_{12} & \cdots & \widehat{a}_{11}b_{1n} \\ \widehat{a}_{22}b_{21} & \widehat{a}_{22}b_{22} & \cdots & \widehat{a}_{22}b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widehat{a}_{nn}b_{n1} & \widehat{a}_{nn}b_{n2} & \cdots & \widehat{a}_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

に対して式 (10) を証明すればよいことになる．行列式 $\det(\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B})$ の第 j 行 ($j = 1, 2, \cdots, n$) はそれぞれ共通の因子 $\widehat{a}_{jj}$ を含んでいる．これらの共通因子の積 $\widehat{a}_{11}\widehat{a}_{22}\cdots\widehat{a}_{nn}$ は，$\widehat{\boldsymbol{A}}$ が対角行列であることから $\det\widehat{\boldsymbol{A}}$ に等しい．共通因子を除いた残りの行列式は $\det \boldsymbol{B}$ となり，公式 (10) が証明される． ◀

連立 1 次方程式に関する論述 (1.3–1.7 節) はこれで終わる．(数値的方法については第 5 巻 2.1–2.4 節を参照せよ．これらの節は数値的方法のほかの節とは独立な形になっている．) ベクトル空間および 1 次変換を扱う 1.8 節は選択課程向きである．

---

13) (訳注) 例 1 に示された通常のガウス・ジョルダン消去法では，$\boldsymbol{A}$ は一般の対角行列ではなく単位行列に変換される．この場合，利用される基本行変形は 1.6 節の定理 1 (a), (b), (c) であるが，対角化だけが目的ならば (c) は省略してもよい．すなわち，(a), (b) だけを用いてガウス・ジョルダン法を実行すれば $\boldsymbol{A}$ は対角行列に変換される．

❖❖❖❖❖ 問題 1.7 ❖❖❖❖❖

逆行列　つぎの行列の逆行列をガウス・ジョルダン消去法によって計算せよ．あるいは逆行列が存在しないことを示せ．(計算の詳細を述べよ.)

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　**2.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}$　**3.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$　**5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 15 & 1 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$　**6.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$　**8.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　**9.** $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. (2 乗の逆行列)　$(\boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^2$ を示せ．

11. (2 乗の逆行列)　問題 1 の $\boldsymbol{A}$ について $(\boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^2$ を確かめよ．

12. (転置行列の逆行列)　$(\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^T)^{-1}$ を示せ．

13. (対称行列の逆行列)　正則な対称行列の逆行列も対称であることを示せ．

14. (逆行列の逆行列)　$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$ を証明せよ．

逆行列の公式　式 (4) により逆行列を計算し，式 (1) により結果を確認せよ．(計算の詳細を示せ.)

15. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　**16.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　**17.** $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ -0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$　**19.** $\begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -1.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$　**20.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

21. **[CAS プロジェクト] ヒルベルト行列の実験**　$n \times n$ ヒルベルト行列 $\boldsymbol{H}_n = [h_{jk}]$ とは成分 $h_{jk} = 1/(j+k-1)$ をもつ行列である．たとえば，

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{など.}$$

ヒルベルト行列についてつぎのような実験を行え．

(a)　$n = 2, \cdots, 8$ に対して $\det \boldsymbol{H}_n$ および $\boldsymbol{H}_n{}^{-1}$ を計算せよ．$\det \boldsymbol{H}_n$ の値や $\boldsymbol{H}_n{}^{-1}$ の成分を観察した結果を述べよ．

(b)　成分を与える公式を $h_{jk} = 1/(2j+2k-3)$ に変えたときに，行列式の値の減少や逆行列の成分の増加がどのように変わるかを実験によって調べよ．

(c)　$\boldsymbol{H}_n{}^{-1}$ の成分は整数である．h_{jk} のほかの公式で $\boldsymbol{H}_n{}^{-1}$ の成分が整数となるものを見いだせないか．

1.8 ベクトル空間，内積空間，1次変換［選択］

特殊なベクトル空間はすでに1.4節で考察されているので，この機会にさっと読み返すことが望ましい．ベクトル空間は，n 個の（実数）成分をもつベクトルを選び，そのすべての1次結合（それ自身 n 成分のベクトル）の集合すなわちスパンを構成することによって得られたことを思い出してほしい．

n 個の実数を成分としてもつすべてのベクトル（"実ベクトル"）をとり，実数をスカラーとみなせば，非常に重要な **n 次元実ベクトル空間** R^n が得られる．これは標準的な名称と記号である．R^n におけるベクトルは n 実数の順序組である．

とくに $n=3$ のとき，R^3 は3実数の順序組（"3次元の空間ベクトル"）からなる．$n=2$ ならば R^2 は順序対（"平面ベクトル"）で構成される．3章と4章では，R^2 および R^3 におけるベクトルが力学，幾何学，微分積分学などで広く応用され，工学者や物理学者にとっても基礎的な概念であることが示されるだろう．

同様に，すべての n 個の複素数の順序組をベクトル，複素数をスカラーとすれば，後に2.4節で論じる**複素ベクトル空間** C^n が得られる．

このほかにも，和とスカラー倍が自然に定義される実際面でも興味深い集合（行列，関数，変換などの集合）がある．このような集合を"ベクトル空間"として扱うためには，R^2 のもっとも重要な基本的性質を公理として採用することによって，"実ベクトル空間" V の"具体的モデル" R^n から"抽象的概念"を創造する必要がある．これらの公理は，より一般的な対象に関する有用で実際的な理論を形成するために不可欠なものに限らなければならない．公理の選択は容易ではなく，経験とときには長い時間を必要とする．いまの場合にはつぎに述べる公理系が役だつことがわかる．実際には諸公理は R^n または R^3 の簡単な性質を表し，1.1節の式(4)，(5)とまったく一致する（比較せよ）．

実ベクトル空間の定義

元 $a, b, \cdots$ の空でない集合 V があって，つぎのような2種類の代数演算（ベクトルの和とスカラー倍とよばれる）が V で定義されているとき，集合 V を**ベクトル空間**（または**線形空間**），その元を**ベクトル**[14)]とよぶ．

I. **ベクトルの和**は V の任意の2つのベクトルに対して一意的に定まるベクトルであって，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と書かれる．これはつぎの公理を満足する．

14）この定義は V の元が現実に何をさすかにふれていないが，実際には個々の場合の元の実体は前後関係からわかるので混乱を起こすおそれはない．

I.1　(交換法則)　V の任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

が成立する．

I.2　(結合法則)　任意の 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して，

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \qquad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \text{ と書ける})$$

が成立する．

I.3　V のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$$

であるようなただ 1 つのベクトル $\boldsymbol{0}$ が存在する．このベクトル $\boldsymbol{0}$ を**零ベクトル**とよぶ．

I.4　V のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

であるようなベクトル $-\boldsymbol{a}$ がただ 1 つ存在する．

II.　スカラー倍　実数をスカラーとよぶことにすると，V のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ とすべてのスカラー c に対して，ベクトルの**スカラー倍**とよばれ $c\boldsymbol{a}$(または $\boldsymbol{a}c$) と記されるベクトルがただ 1 つ存在する．これはつぎの公理を満足する．

II.1　(分配法則)　すべてのスカラー c と V のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b}$$

が成立する．

II.2　(分配法則)　すべてのスカラー c, k と V のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$(c+k)\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$$

が成立する．

II.3　(結合法則)　すべてのスカラー c, k と V のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$c(k\boldsymbol{a})=(ck)\boldsymbol{a} \qquad (ck\boldsymbol{a} \text{ と書ける})$$

が成立する．

II.4　V のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

が成立する．

実数のかわりに複素数をスカラーにとれば**複素ベクトル空間**が得られる．

ベクトル空間に関連する基本概念

ここで導入する諸概念は 1.4 節と同じように定義される．

ベクトル空間 V におけるベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ の **1 次結合**とは

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (c_1, \cdots, c_m \text{は任意のスカラー})$$

をさす．これらのベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ は，

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

ならば $c_1 = 0, \cdots, c_m = 0$ となるとき，**1 次独立**な組を構成する (あるいは単に 1 次独立である) という．そうでない場合には **1 次従属**であるという．$m = 1$ のときには式 (1) は $c\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となるから，単一のベクトル $\boldsymbol{a}$ が 1 次独立であることは $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ と同値である．

ベクトル空間 V は n 個のベクトルの 1 次独立な組を含むが，n 個より多数のベクトルの組がすべて 1 次従属であるとき，V は**次元** n をもつ，もしくは n **次元**であるという．また，この n 個の 1 次独立なベクトルの組を V の**基底**とよぶ．V のすべてのベクトルは基底ベクトルの 1 次結合として一意的に表現することができる．

例 1　行列のベクトル空間　2×2 実行列は 4 次元の実ベクトル空間を構成する．基底は

$$\boldsymbol{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．任意の 2×2 行列は $\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = a_{11}\boldsymbol{B}_{11} + a_{12}\boldsymbol{B}_{12} + a_{21}\boldsymbol{B}_{21} + a_{22}\boldsymbol{B}_{22}$ によって一意的に表されるからである．同様に，$m \times n$ 実行列は mn 次元のベクトル空間を構成している．すべての 3×3 交代行列がつくるベクトル空間の次元はいくらか．その基底を見いだせ． ◀

例 2　多項式　すべての定数および x の 1 次と 2 次の多項式の集合は，ふつうの和と実数倍に関連するベクトル空間を構成する．なぜならば，この 2 種類の演算は 2 以下の次数の多項式しか与えず，定義の公理も直接計算によって確かめられるからである．このベクトル空間の次元は 3 で，基底は $\{1, x, x^2\}$ である． ◀

例 3　2 階同次線形微分方程式　2 階同次線形微分方程式の区間 $a < x < b$ における解は，ふつうの和および数との積に関連するベクトル空間を構成する．第 1 巻 2.1 節の定理 1 によれば，解にこの 2 種類の演算を施してもやはり解になるからである．I.1 から II.4 までのベクトル空間の公理はもちろん満足される．非同次線形微分方程式の解もまたベクトル空間をつくるだろうか． ◀

n がどんなに大きくても，ベクトル空間 V が任意個数 n のベクトルの 1 次独立な組を含むとき，V は**無限次元**であるという．これに対して，前に定義された n 次元ベクトル空間は有限次元である．無限次元ベクトル空間の実例は x のある区間 $[a, b]$ 上で定義されるすべての連続関数の集合である．ここでは証明せずに事実だけを述べておく．

内積空間

1.2 節では，R^n のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b}$ を定義できることを知った．この定義は，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ の基礎的な性質を "抽象的な" 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ の公理として採用することによって，一般の実ベクトル空間に拡張される．

実内積空間の定義

実ベクトル空間がつぎの性質をもっているとき，**実内積空間**または**実原ヒルベルト**[15]**空間**という．すなわち，V の任意の 1 対のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に，つぎの公理を満足するような実数が対応するとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書き，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**というのである．

I. すべてのスカラー q_1, q_2 と V のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，

$$(q_1\boldsymbol{a} + q_2\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = q_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + q_2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad \text{(線形性)}$$

が成立する．

II. V におけるすべてのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \qquad \text{(対称性)}$$

が成立する．

III. V のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$\left.\begin{array}{c} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0, \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}^{16)} \end{array}\right\} \qquad \text{(正値性)}$$

が成立する．

内積が 0 である 1 対のベクトルは**直交**しているという．

V のベクトルの**ノルム**または大きさは

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \quad (\geqq 0) \qquad (2)$$

によって定義される．

ノルム 1 のベクトルを**単位ベクトル**という．

---

15) David Hilbert (1862–1943)，ドイツの大数学者．ケーニヒスベルク大学やゲッチンゲン大学で教え，有名なゲッチンゲン学派を育てた．彼は代数学，変分法，積分方程式，関数解析，数理論理学などの諸分野における基本的な仕事で知られている．彼の "幾何学基礎論" は，公理論的方法が一般的に認識される契機となった．有名なヒルベルトの 23 の問題 (1900 年にパリの国際数学者会議で提出されたもの) は，現代数学の発展に大きな影響を及ぼした．

空間 V が無限次元ならばいわゆるヒルベルト空間になる．付録 1 の [9] を参照せよ．

16) (訳注)　$A \Longleftrightarrow B$ は命題 A と命題 B が同値であること，すなわち A ならば B $(A \Rightarrow B)$ かつ B ならば A $(B \Rightarrow A)$ であることを表す．

内積の公理と式 (2) からつぎの基本的な不等式が導かれる[17)]．

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|. \qquad \text{(シュワルツ}^{18)}\text{の不等式)} \qquad (3)$$

これから，

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|. \qquad \text{(3 角不等式)} \qquad (4)$$

さらに簡単な計算によって，

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2) \qquad \text{(平行 4 辺形の等式)} \qquad (5)$$

が得られる．

例 4　n 次元ユークリッド空間　R^n において 1.2 節の内積

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \qquad (6)$$

($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ はいずれも列ベクトルとする) が定義されているとき，R^n を n 次元ユークリッド空間といい E^n(あるいはふたたび R^n) と記す．直接計算により公理 I–III がなりたつことが示される．このとき式 (2) はユークリッドノルム

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2} \qquad (7)$$

を与える．◀

例 5　関数の内積　与えられた区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ 上のすべての実数値連続関数の集合は，通常の関数の和とスカラー (実数) 倍に関連した実ベクトル空間を構成する．この空間では内積は積分

$$(f,g) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx \qquad (8)$$

によって定義される．公理 I–III は直接計算により確かめられる．式 (2) のノルムは

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_\alpha^\beta f(x)^2\,dx} \qquad (9)$$

となる．◀

これらの具体例をさっと見ただけでも，ベクトル空間や内積空間という抽象的概念が普遍的なものであることが理解されるだろう．詳細な議論はもっと進んだ課程 (現代抽象解析を意味する関数解析，付録 1 の [9] を参照せよ) の問題でありここで扱うことはできない．そのかわりに行列が中心的な役割を果たしている 1 つの話題だけをとりあげよう．

---

17) (訳注)　$\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \mp \dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|},\ \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \mp \dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}\right) \geqq 0$ からただちに導かれる．

18) Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)，ドイツの数学者．ベルリン大学における Weierstrass の後継者であり，複素解析 (等角写像)，微分幾何，変分法 (極小曲面) などにおける研究で知られている．

1 次 変 換

X と Y を任意のベクトル空間とする．X の各ベクトル $\boldsymbol{x}$ に Y のベクトル $\boldsymbol{y}$ を 1 つずつ対応させる．このとき，X から Y への**写像** (**変換**，**演算子**) が与えられているという．写像は F のように大文字で表す．X のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対応する Y のベクトル $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ の**像**といい，$F(\boldsymbol{x})$ (あるいは括弧をはずして $F\boldsymbol{x}$) と書く．

X における任意のベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}$ と任意のスカラー c に対して，

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}) &= F(\boldsymbol{v})+F(\boldsymbol{x}), \\ F(c\boldsymbol{x}) &= cF(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{\textbf{10}}$$

が成立するとき，F を**線形写像**あるいは **1 次変換**という．

空間 R^n から空間 R^m への 1 次変換

今後は $X=R^n$, $Y=R^m$ としよう．すると，任意の $m\times n$ 実行列 $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ が R^n から R^m への変換を与えることになり，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{11}$$

と書ける．$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ でしかも $\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ なので，これは 1 次変換である．

逆に，R^n から R^m へのあらゆる 1 次変換は，あらかじめ R^n の基底と R^m の基底を選んでおけば，$m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ によって表すことができる．これはつぎのように証明される．

$\boldsymbol{e}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{e}_{(n)}$ を R^n の基底とすると，R^n におけるすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_{(1)}+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_{(n)}$$

によって一意的に表現される．F は 1 次変換であるから，$\boldsymbol{x}$ の像についても

$$F(\boldsymbol{x})=F(x_1\boldsymbol{e}_{(1)}+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_{(n)})=x_1F(\boldsymbol{e}_{(1)})+\cdots+x_nF(\boldsymbol{e}_{(n)})$$

となり，F は R^n の基底ベクトルの像によって一意的に決定される．いま，R^n の基底として**標準基底**

$$\boldsymbol{e}_{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_{(2)}=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_{(n)}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{12}$$

を選ぼう．ただし $\boldsymbol{e}_{(j)}$ の第 j 成分は 1 でそれ以外の成分は 0 である．$m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ は，R^n におけるすべての $\boldsymbol{x}$ と R^m における像 $\boldsymbol{y}=F(\boldsymbol{x})$ に対して，

$$\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

がなりたつように決めることができる．実際，$\boldsymbol{e}_{(1)}$ の像 $\boldsymbol{y}^{(1)} = F(\boldsymbol{e}_{(1)})$ から条件

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

が得られるので，$\boldsymbol{A}$ の第１列の成分を $a_{11} = y_1^{(1)}$，$a_{21} = y_2^{(1)}$，$\cdots$，$a_{m1} = y_m^{(1)}$ と定めることができる．$\boldsymbol{e}_{(2)}$ の像からは $\boldsymbol{A}$ の第２列が定まり，以下同様に第 n 列まで求めることができる．これで証明が終わる．

以上の結果を要約して，$\boldsymbol{A}$ は R^n と R^m の基底に関連させて F を**表現する**，または F の**表現**であるという．このような“表現”の目的は，ある研究対象をもっとわかりやすい性質の対象でおきかえることである．

３次元空間 R^3 の標準基底は通常 $\boldsymbol{e}_{(1)} = \boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{e}_{(2)} = \boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_{(3)} = \boldsymbol{k}$ と書かれる．すなわち，

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(13)}$$

これらのベクトルは３次元空間のデカルト座標系 (3 つの互いに直交する座標軸をもつ同じ尺度の座標系) の座標軸の正の方向に向く３つの単位ベクトルである．

例 6　**1 次変換**　2×2 行列を平面上のデカルト座標系の変換と解釈すると，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は，それぞれ直線 $x_2 = x_1$ による鏡映，x_1 軸による鏡映，原点を中心とする反転，x_1 方向の伸縮 ($a > 1$ ならば伸び，$0 < a < 1$ ならば縮み) を表す．◀

例 7　**1 次変換**　例 6 の前に与えた論法は見た目よりも簡単である．これを確かめるために，(x_1, x_2) を $(2x_1 - 5x_2, 3x_1 + 4x_2)$ の上に写像する１次変換を表す行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

[解]　与えられた変換は明らかに

$$y_1 = 2x_1 - 5x_2,$$
$$y_2 = 3x_1 + 4x_2$$

であるから，ただちに行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ が導かれる．実際，

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_2 + 4x_2 \end{bmatrix}.$$ ◀

式 (11) の行列 $\boldsymbol{A}$ が $n \times n$ 正方行列ならば，式 (11) は R^n を R^n に写像する．この $\boldsymbol{A}$ が正則で $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する (1.7 節) ときには，式 (11) に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛けて $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ を使うと，**逆変換**

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{14}$$

が得られる．この逆変換式 (14) はすべての $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0$ を，式 (11) によって $\boldsymbol{y}_0$ に写像された $\boldsymbol{x}$ に写像する．逆変換もまた式 (14) の示すように行列によって与えられるので，1 次変換の逆変換はそれ自身 1 次変換である．

❖❖❖❖❖ 問題 1.8 ❖❖❖❖❖

ベクトル空間，基底 (1.4 節の問題も参照のこと)

つぎに与えられた (通常の和とスカラー倍を定義できる) 集合はベクトル空間を構成するか．(理由も示せ．)　ベクトル空間ならばその次元を求め基底を見いだせ．

1. R^3 で $v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$ を満足するすべてのベクトル．

2. 4 つの非負実数のすべての順序組．

3. 次数が 3 を超えないすべての x の多項式．

4. $y(x) = a\cos x + b\sin x$ (a, b は任意の定数) で定義されるすべての関数．

5. すべての 2×2 交代行列．

6. すべての 3×3 対称行列．

7. $a_{11} + a_{22} = 0$ がなりたつすべての 2×2 行列．

8. 第 1 行が $[2 \quad -1 \quad 3]$ のスカラー倍であるすべての 2×3 行列．

9. 正の成分をもつすべての $m \times n$ 行列．

10. 主対角線が 1, 1, 1 であるすべての 3×3 行列．

11. R^2 の 3 つの異なる基底を見いだせ．

12. **(一意性)**　n 次元ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は基底 $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(n)}$ によって $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_{(n)}$ と表現される．この表現が一意的であることを示せ．

内積，直交性

つぎのベクトルのユークリッドノルムを求めよ．

13. $[0.4 \quad 1.3 \quad -2.2]^T$　**14.** $[2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 8]^T$　**15.** $[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3}]^T$

16. $[2 \quad 3 \quad -5]^T$　**17.** $[3 \quad 2 \quad -2 \quad 4 \quad 0]^T$　**18.** $[6 \quad 1 \quad 0 \quad 5]^T$

19. 問題 14 のベクトルと問題 17 のベクトルが直交することを示せ．

20. $[3 \quad -4]$ と直交するすべての単位ベクトル $\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2]$ を定めよ．

21. $\boldsymbol{a} = [1 \quad 2 \quad 0]^T$ と直交するすべての $\boldsymbol{v}$ を定めよ．それらのベクトルはベクトル空間をつくるか．

ユークリッドノルムを用いてつぎの各式を検証せよ．

22. 問題 13 と問題 16 のベクトルに対するシュワルツの不等式．

23. 問題 13 と問題 16 のベクトルに対する 3 角不等式．

24. ベクトル $[2\quad 1]^T$ とベクトル $[1\quad 3]^T$ に対する平行 4 辺形の等式．2 つのベクトルを辺とする平行 4 辺形を描き，この等式の幾何学的意味を説明せよ．

1 次変換

つぎの 1 次変換の逆変換を求めよ．(計算の詳細を述べよ．)

25. $y_1 = 3x_1 + 2x_2,$
$y_2 = 4x_1 + \ x_2$

26. $y_1 = 0.5x_1 - 0.5x_2,$
$y_2 = 1.5x_1 - 2.5x_2$

27. $y_1 = 5x_1 + 3x_2 - 3x_3,$
$y_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3,$
$y_3 = 2x_1 - \ x_2 + 2x_3$

28. $y_1 = 4x_1 \qquad + 2x_3,$
$y_2 = \qquad x_2 + 4x_3,$
$y_3 = \qquad\qquad 5x_3$

29. $y_1 = 0.2x_1 - 0.1x_2,$
$y_2 = \qquad - 0.2x_2 + 0.1x_3,$
$y_3 = 0.1x_1 \qquad + 0.1x_3$

30. $y_1 = x_1,$
$y_2 = \qquad x_2 \cos\theta + x_3 \sin\theta,$
$y_3 = \quad - x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta$

1 章の復習

1. A を 10×5 行列，B を 10×10 行列とする．つぎの行列は定義できるかどうかを示せ．

$$5\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{AB},\quad \boldsymbol{BA},\quad \boldsymbol{A}^2,\quad \boldsymbol{B}^2,\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{AB}^T,$$
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{BB}^T,\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{BA},\quad \boldsymbol{AA}^T - \boldsymbol{B}.$$

2. 行列の積はどんな動機で定義されたのか．

3. 数の積とは違う行列の積の異常な性質を列挙せよ．その実例を示せ．

4. 逆行列とは何か．それはどんなときに存在するか．どうすれば計算できるのか．

5. 行列の階数とは何か．なぜ基本的に重要なのか．

6. まったく解をもたない連立 1 次方程式は存在するか．

7. ガウス消去法とは何か．ガウス・ジョルダン消去法とは何か．

8. 非同次連立 1 次方程式の解の数はいくらか．同次連立 1 次方程式についてはどうか．

9. クラメールの公式とは何か．どんな場合に適用されるのか．

10. 20×12 行列の行ベクトルは 1 次独立になりうるか．

和，スカラー倍，積

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

としてつぎの行列を計算せよ．

11. $\boldsymbol{AB}$　**12.** $\boldsymbol{BA}$　**13.** $\frac{1}{5}\boldsymbol{ABA}$　**14.** $\boldsymbol{A}^2,\quad \boldsymbol{AA}^T$

15. $\boldsymbol{B}^2$　**16.** $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$　**17.** $\boldsymbol{BB}^T,\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$　**18.** $\frac{1}{21}\boldsymbol{BB}^T\boldsymbol{B}$

19. $\boldsymbol{Ac}$　**20.** $\boldsymbol{Bd}$　**21.** $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d}$　**22.** $\det \boldsymbol{A}$

23. $0.1\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}$　**24.** $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}$　**25.** $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{Bd}$

連立 1 次方程式　つぎの連立 1 次方程式を解け．あるいは解が存在しないことを示せ．(計算の詳細を述べよ.)

26. $$\begin{aligned} 4y + z &= 0,\\ 12x - 5y - 3z &= 17,\\ -6x + 4z &= 4 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} 9x + 3y - 6z &= 30,\\ 2x - 4y + 8z &= 2 \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= 3,\\ x - 4y + z &= 0,\\ -14x - 21y + 49z &= -20 \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} 3x - 7y + 13z &= 32.4,\\ 9y - 8z &= -25.3,\\ 7z &= 11.9 \end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} 5x - 3y + 7z &= -27,\\ 10x - 9z &= 27,\\ -x + 6y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

31. $$\begin{aligned} 22x - 13y + z &= 0,\\ -13x - 4z &= 0,\\ x - 4y - 11z &= 0 \end{aligned}$$

32. $$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0,\\ 5x - 3y + z &= 7,\\ 8x + 9y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

33. $$\begin{aligned} -3y + 9z &= 36,\\ 2x + 17z &= 35,\\ -x - y + 34z &= 34 \end{aligned}$$

34. $$\begin{aligned} 2x - 13y + 3z &= 4,\\ -6x + 39y - 9z &= -12 \end{aligned}$$

階　数　つぎの問題の係数行列と拡大行列の階数を求めよ．(推論の詳細を示せ.)

35. 問題 27　**36.** 問題 28　**37.** 問題 29

38. 問題 30　**39.** 問題 31　**40.** 問題 32

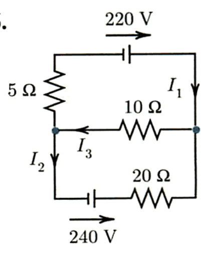
逆行列　問題 11–25 で与えられた行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をとり，3×3 単位行列を $\boldsymbol{I}$ とする．つぎの行列の逆行列を求めるか，あるいは存在しないことを示せ．得られた結果を検算せよ．(詳細を示せ.)

41. $\dfrac{1}{5}\boldsymbol{A}$　**42.** $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}$　**43.** $\boldsymbol{B}$　**44.** $\dfrac{1}{11}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})$　**45.** $\dfrac{1}{9}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})$

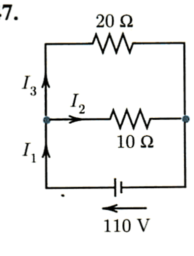
回路網

つぎの回路網を流れる電流 I_1, I_2, I_3 を求めよ．

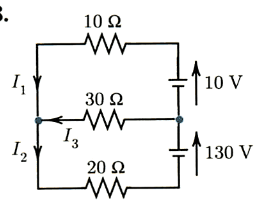
46.



47.



48.



4 端子回路　図 1.6 のような 4 端子回路において，入力電流 i_1，入力電圧 u_1 と出力電流 i_2，出力電圧 u_2 の間の関係は次式によって表されると仮定する．

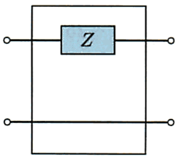
$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_2,\ \text{ただし}\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

行列 $\boldsymbol{T}$ は 4 端子回路の伝送行列とよばれる．$\boldsymbol{T}$ の形を確かめよ．



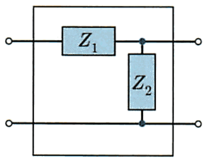
図 1.6　4 端子回路

49.



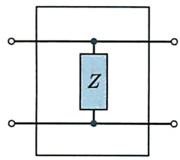
$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

50.



$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

51.



$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{bmatrix}$$

1 章のまとめ

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ は，数（“成分” または “要素”）を m 個の横の行および n 個の縦の列に並べた長方形の配置である．$m = n$ のときには**正方行列**とよばれる．$1 \times n$ 行列は**行ベクトル**，$m \times 1$ 行列は**列ベクトル**とよばれる (1.1 節).

$m \times n$ 行列の**和** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ は対応する成分を加え合わせて得られる．$\boldsymbol{A}$ の**スカラー倍** $c\boldsymbol{A}$ は各成分 a_{jk} にスカラー c を掛けることによって得られる (1.1 節).

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と $r \times p$ 行列 $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ との**積**は $r = n$ のときに限って定義される $m \times p$ 行列 $\boldsymbol{C} = [c_{jk}]$ であって，その成分は

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} \qquad (\boldsymbol{A}\text{の第 } j \text{ 行} \times \boldsymbol{B}\text{の第 } k \text{ 列}) \qquad (1)$$

によって与えられる．この積は **1 次変換**の合成を表現するために導入された (1.2, 1.8 節). 結合法則は成立するが，可換法則は必ずしも成立しない．行列 $\boldsymbol{AB}$ が定義されるときでも，行列 $\boldsymbol{BA}$ が定義されるとは限らない．行列 $\boldsymbol{BA}$ が定義されたとしても，一般には $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ である．また，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ は必ずしも $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$，あるいは $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$ を意味しない (1.2, 1.7 節). 実例をあげると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$[1 \quad 2]\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}=[11], \qquad \begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}[1 \quad 2]=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 4 & 8\end{bmatrix}.$$

行列 $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ の**転置行列** $\boldsymbol{A}^T$ は $\boldsymbol{A}^T=[a_{kj}]$ である．すなわち，行は列に移り，逆に列は行に移る (1.1 節)．ただし $\boldsymbol{A}$ は正方行列である必要はない．正方行列 $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$ ならば**対称行列**であるといい，$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^T$ ならば**交代行列**であるという．積に対しては $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ がなりたつ (1.2 節).

行列のおもな応用は**連立 1 次方程式**

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \qquad (1.3\text{ 節}) \tag{2}$$

(m 個の方程式，n 個の未知数 $x_1,\cdots,x_n$，与えられた定数 $b_1,\cdots,b_m$) に関するものである．連立 1 次方程式のもっとも重要な解法は，基本行変形によって連立 1 次方程式を "3 角型" に帰着させる**ガウス消去法** (1.3 節) である．(数値計算上の問題点やドゥリットル法，コレスキー法などの類似の解法については第 5 巻 2.1, 2.2 節を参照せよ.)

クラメールの公式 (1.6 節) は，n 個の方程式と n 個の未知数をもつ連立 1 次方程式 (2) の未知数を行列式の商として表すが，数値計算には適していない．そのため，**行列式** (1.6 節) は以前ほど重視されなくなったが，それでも固有値問題や幾何学などでは今後も有用な役割を果たすだろう．

逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ を満足する正方行列である．それは $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ のときまたそのときに限り存在する．逆行列は**ガウス・ジョルダン消去法** (1.7 節) によって計算することができる．

行列 $\boldsymbol{A}$ の**階数** r は $\boldsymbol{A}$ の 1 次独立な行ベクトルあるいは列ベクトルの最大個数である．これは 0 でない行列式をもつ $\boldsymbol{A}$ の最大の正方小行列の行数に等しい (1.4, 1.6 節).

連立 1 次方程式 (2) は $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}]$ のとき，またそのときに限って解をもつ (1.5 節の基本定理)．ここで $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}]$ は拡大行列である．

同次連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

が解 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ("自明でない解") をもつための必要十分条件は $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<n$，とくに $m=n$ のときには $\det\boldsymbol{A}=0$ である (1.5, 1.6 節).

ベクトル空間，内積空間，1 次変換については 1.8 節で論じる．1.4 節も参照するとよい．

2

線形代数：行列の固有値問題

行列の固有値問題は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad (1)$$

の形のベクトル方程式に関連している．ここで $\boldsymbol{A}$ はある与えられた正方行列である．本章で扱う行列はすべて $n \times n$ 正方行列とする．さらに，$\boldsymbol{x}$ は未知のベクトルで λ は未知のスカラーとする．目標は式 (1) を解くことである．明らかに，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ を与えるため 1 つの解であるが，これは実際には興味がない．解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を求めたい．このような解を $\boldsymbol{A}$ の**固有ベクトル**という．解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ はある λ の値だけに対して存在することが後に示される．これらの値を $\boldsymbol{A}$ の**固有値**（または特性値）とよぶ．幾何学的には，方程式 (1) を解くことは，$\boldsymbol{A}$ との積 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が，スカラー倍 $\lambda\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}$ の成分に比例する成分をもち $\boldsymbol{x}$ と同じ方向を向くベクトル) と同じ効果を与えるような $\boldsymbol{x}$ を見いだすことを意味する．

固有値問題は工学者や物理学者にとってきわめて重大な問題であり，しかも線形代数の美しい一分野を形成している．もちろんこれは式 (1) から自明なことではなくさらに説明する必要がある．

2.1 節では基本的な諸概念および固有値と固有ベクトルを系統的に決定する方法を説明する．典型的な応用例が 2.2 節に与えられている．2.3 節では対称行列，交代行列，直交行列の固有値問題を扱い，2.4 節では対応する複素行列であるエルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列の固有値問題を扱う．最後に 2.5 節において，行列の対角化によっても固有値が導かれることを示す．

第 5 巻 2.6–2.9 節に記載されている**数値的方法**は，本章の対応する部分を読んだあとですぐに学ぶことができる．

本章を学ぶための予備知識：1 章．

短縮コースでは省略してもよい節：2.4, 2.5 節．

参考書：付録 1．

問題の解答：付録 2．

2.1 固有値，固有ベクトル

工学的な応用という立場からみれば，固有値問題は行列に関連したもっとも重要な問題であり，読者はとくに注意して学習しなければならない．ここでは，まず基礎概念を定義し典型的な実例によって説明する．それから実際的な応用にうつろう．

$\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ を与えられた $n \times n$ 行列とし，ベクトル方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{1}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{x}$ は未知のベクトル，λ は未知のスカラーであって，その両方を決定したい．

明らかに，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は λ のどんな値に対しても式 (1) の解である．しかし，これには実際的な意味がない．式 (1) が解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ をもつような λ の値を，行列 $\boldsymbol{A}$ の**固有値**あるいは**特性値** (**特性根**) という．そのときの式 (1) の解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を，固有値 λ に対応する $\boldsymbol{A}$ の**固有ベクトル**あるいは**特性ベクトル**という．固有値全体の集合は $\boldsymbol{A}$ の**スペクトル**とよばれ，$\boldsymbol{A}$ の固有値の絶対値の最大値は $\boldsymbol{A}$ の**スペクトル半径**とよばれる．

$\boldsymbol{A}$ のある固有値に対応するすべての固有ベクトルの集合は，零ベクトル $\boldsymbol{0}$ と合わせてベクトル空間 (1.4 節) を構成する．これをこの固有値に対応する $\boldsymbol{A}$ の**固有空間**という．

ある行列の固有値および固有ベクトルを決定する問題は**固有値問題**[1)]とよばれる．この種の問題は物理学，工学，幾何学などの多くの応用に関連して現れる．

固有値と固有ベクトルの求め方

例 1 **固有値と固有ベクトルの決定** 行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

の固有値問題を解く手順を示す．

［解］ (a) **固有値** 最初に固有値を決めなければならない．式 (1) は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

であるから，成分に関する方程式は

---

1) くわしくいえば代数的固有値問題である．ほかにも微分方程式 (第 1 巻 4.7 節，第 3 巻 3.3 節) や積分方程式に関係した固有値問題がある．

$$-5x_1 + 2x_2 = \lambda x_1,$$
$$2x_1 - 2x_2 = \lambda x_2$$

となる．右辺から左辺に移項すれば，

$$\begin{aligned} (-5-\lambda)x_1 + \quad\quad 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2*}$$

行列の形に書きかえると，

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{3*}$$

(実際，式 (1) は $\boldsymbol{Ax} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{Ax} - \lambda\boldsymbol{Ix} = \boldsymbol{0}$ となり，式 (3*) が得られる.) これは同次連立 1 次方程式である．ゆえに，1.6 節のクラメールの定理によれば，自明でない解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (求める $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル) が存在するための必要十分条件は，係数行列式が 0 になることである．すなわち，

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) \\ &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0. \end{aligned} \tag{4*}$$

$D(\lambda)$ を**固有行列式**，その展開式を**固有多項式**とよぶ．$D(\lambda) = 0$ は $\boldsymbol{A}$ の**固有方程式**である．この 2 次方程式の解は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = -6$ である．こうして $\boldsymbol{A}$ の 2 つの固有値が求められた．

(b$_1$)　**λ_1 に対応する固有ベクトル**　$\lambda = \lambda_1 = -1$ のとき，式 (2*) は

$$-4x_1 + 2x_2 = 0,$$
$$2x_1 - \;\; x_2 = 0$$

となる．解は $x_2 = 2x_1$ である．これでスカラー乗数を除いて固有ベクトルが確定する．$x_1 = 1$ を選択すると 1 つの固有ベクトル

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

が得られる．検算は容易である．

$$\boldsymbol{Ax}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1.$$

(b$_2$)　**λ_2 に対応する固有ベクトル**　$\lambda = \lambda_2 = -6$ に対しては，式 (2*) は

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$
$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

となる．解は $x_2 = -x_1/2$ である．$x_2 = 2$ を選ぶと $x_1 = -1$ が得られる．したがって，$\lambda_2 = -6$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の 1 つの固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

で与えられる (検算せよ).　◀

つぎに一般の場合を説明しよう．ベクトル方程式 (1) を成分を用いて書くと，

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n. \end{aligned}$$

右辺を左辺に移項して，

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + \quad a_{12}x_2 + \cdots + \quad a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + \quad a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \quad a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

行列による表示ではつぎのようにまとめられる．

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \qquad (3)$$

1.6 節のクラメールの定理によれば，この同次連立 1 次方程式は係数のつくる行列式が 0 のとき，またそのときに限り自明でない解をもつ．すなわち，

$$D(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

$D(\lambda)$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の**固有行列式**，式 (4) は $\boldsymbol{A}$ の**固有方程式**とよばれる．$D(\lambda)$ を展開すると λ の n 次の多項式が得られる．これを $\boldsymbol{A}$ の**固有多項式**という．

このようにしてつぎの重要な定理が証明される．

定理 1 (固有値) 正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は固有方程式 (4) の根である．したがって，$n \times n$ 行列は少なくとも 1 つ，そして高々 n 個の数値的に異なる固有値をもつ．

n がかなり大きい場合，実際の固有値の計算にはニュートン法 (第 5 巻 1.2 節) やそれ以外の近似計算法 (第 5 巻 2.7–2.9 節) が必要になる．

まず固有値を決定しなくてはならない．いったん固有値が求まれば，その固有値 λ に対応する固有ベクトルを，たとえばガウス消去法などによって定めることができる．これが例 1 で実行したことであり，後の例でも繰り返されることになる[2]．

---

2) 誤解を避けるためにつけ加えておくが，はじめに固有ベクトル (の近似) を与えて固有値を計算する数値的方法もある (第 5 巻 2.8 節).

固有ベクトルは (ある条件のもとでは[3]) 0 でないスカラー乗数を除いて確定する．

定理 2 (固有ベクトル) x が固有値 λ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルならば，任意の $k \neq 0$ によるスカラー倍 $k\boldsymbol{x}$ もまた固有ベクトルである．

［証明］ $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ ならば，$k(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$ となる． ◀

例 2 および例 3 は，$n \times n$ 行列が n 個か n より少数の 1 次独立な固有ベクトルをもつことを示す．例 4 では，実行列が複素固有値や複素固有ベクトルをもつ可能性があることを述べる．

例 2 重複固有値

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．

［解］ $\boldsymbol{A}$ の固有行列式から固有方程式

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

が導かれる．この根 ($\boldsymbol{A}$ の固有値) は $\lambda_1 = 5$，$\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ である．固有ベクトルを見いだすために，ベクトル方程式 $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ にガウス消去法 (1.3 節) を適用しよう．固有値 5 に対応する $\boldsymbol{A}$ の 1 つの固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

であることがわかる．重根 $\lambda = -3$ に対応する固有行列は

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

となるが，ガウス消去法によって階段形

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) (訳注) 原著の記述は重複固有値の固有ベクトルに対しては適切でないので，括弧内の語句を補っておく．例 2 の重複固有値 $\lambda = -3$ の場合には，ある固有ベクトルのスカラー倍はたしかに固有ベクトルであるが，それ以外の方向を向く固有ベクトル (平面 $x_1 = -2x_2 + 3x_3$ に属するベクトル) が無数に存在する．

に帰着する．ゆえに階数は 1 である．$x_1+2x_2-3x_3=0$ から $x_1=-2x_2+3x_3$ が得られる．この場合，階数が 1 で $n=3$ であるから，1.5 節の式 (5) によって 2 つの 1 次独立な固有ベクトルが存在する．$x_2=1, x_3=0$ と $x_2=0, x_3=1$ を選択すれば，$\lambda=-3$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の 2 つの 1 次独立な固有ベクトルとして，

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$$

が得られる． ◀

固有方程式の根としての固有値の重複度 M_λ をとくに**代数的重複度**という．これに対して，λ に対応する 1 次独立な固有ベクトルの数 m_λ を**幾何的重複度**という．したがって m_λ は λ に対応する固有空間の次元である．固有多項式は n 次であるから，あらゆる代数的重複度の和は n に等しいはずである．例 2 で $\lambda=-3$ の場合には $m_\lambda=M_\lambda=2$ であった．一般には $m_\lambda \leqq M_\lambda$ である．代数的重複度と幾何的重複度との差 $\Delta_\lambda=M_\lambda-m_\lambda$ を λ の**不足指数**という．例 2 では $\Delta_{-3}=0$ であるが，Δ_λ が正の値をとる場合も少なくない．

例 3 **代数的重複度と幾何的重複度** 行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

の固有方程式は

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2=0$$

となるので，固有値 $\lambda=0$ の代数的重複度は 2 である．しかし幾何的重複度は 1 である．なぜならば，固有ベクトルは固有方程式 $0\cdot x_1+x_2=x_2=0$ により $[x_1\quad 0]^T$ と書けるからである．よって $\Delta_0=1$ が示される． ◀

例 4 **複素固有値と複素固有ベクトルをもつ実行列** 実多項式は複素根 (複素共役対) をもちうるので，実行列でも複素固有値や複素固有ベクトルが存在することがある．たとえば，交代行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

の固有方程式は

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

である．これは固有値 $\lambda_1=i(=\sqrt{-1})$，$\lambda_2=-i$ を与える．2 つの固有値 λ_1,λ_2 に対応する固有ベクトルは，それぞれ $-ix_1+x_2=0$，$ix_1+x_2=0$ から導かれる．$x_1=1$ を選んだ場合の固有ベクトルはつぎのようになる．

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

もっと一般的に，これらの 2 つのベクトルが

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad (a, b \text{ は実数})$$

の固有ベクトルでもあること，また $\boldsymbol{A}$ の固有値が $a + ib$ および $a - ib$ であることも容易に示される．◀

これで行列の固有値問題についての第一印象が得られたと思われるので，次節ではその重要性を示す典型的な応用を解説しよう．

❖❖❖❖❖ 問題 2.1 ❖❖❖❖❖

固有値と固有ベクトル　つぎの行列のスペクトルと固有ベクトルを求めよ．(計算の詳細を示せ.)

1. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$　**2.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　**3.** $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 18 & -12 \end{bmatrix}$　**4.** $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$　**6.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$　**7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$　**8.** $\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$　**10.** $\begin{bmatrix} -10 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & -30 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$　**11.** $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$　**13.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$　**14.** $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

1 次変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ における固有値と固有ベクトルの意義

問題 15–20 で与えられた 1 次変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の行列 $\boldsymbol{A}$ を見いだせ．その固有値と固有ベクトルを決定し幾何学的な意味を説明せよ．これは固有値と固有ベクトルの性質の理解を深める助けとなるだろう．(R^2 における $\boldsymbol{x} = [x \quad y]$ あるいは R^3 における $\boldsymbol{x} = [x \quad y \quad z]$ はデカルト座標である.)　推論の詳細を述べよ．

15. R^2 における x 軸による鏡映．

16. R^2 における原点に関する反時計まわりの角 $\pi/2$ の回転．

17. R^2 における倍率 4 の膨張．

18. R^3 における xy 平面による鏡映．

19. R^2 の y 軸への正射影．

20. R^3 の平面 $y = x$ への正射影．

2.2 固有値問題の応用

本節では行列の固有値問題の非常に広い範囲の応用の中からいくつかの典型的な実例を選んで解説する．第 1 巻 3 章で扱った機械系や電気回路を記述する微分方程式の固有値問題も，行列の固有値問題の具体的な応用例とみなすことができる．本節最後の例 4 は第 1 巻 3.1 節の問題 14 と同じ機械系を扱っている．

例 1　**弾性膜の伸縮**　x_1x_2 平面上に図 2.1 のような弾性膜があって，その境界は円 ${x_1}^2+{x_2}^2=1$ である．この弾性膜を伸ばすと，点 $P:(x_1,x_2)$ は

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}5&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad \text{成分表示では}\quad \begin{aligned}y_1&=5x_1+3x_2,\\y_2&=3x_1+5x_2\end{aligned} \tag{1}$$

に従って点 $Q:(y_1,y_2)$ に移る．Q の位置ベクトル $\boldsymbol{y}$ の方向が P の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向と一致する (同じ向きか逆向き) とき，その $\boldsymbol{x}$ の方向を**主方向**とよぶ．主方向を求めよ．この変形によって境界円はどんな形に変わるか．

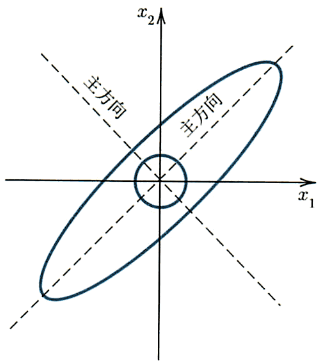


図 2.1　例 1 の変形前後の弾性膜

[解]　$\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めればよい．$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と組み合わせて $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ が得られるが，これは固有値問題 (1) の形である．成分で表すと，

$$\begin{aligned}5x_1+3x_2&=\lambda x_1,\\3x_1+5x_2&=\lambda x_2.\end{aligned}\quad \text{または}\quad \begin{aligned}(5-\lambda)x_1+\qquad 3x_2&=0,\\3x_1+(5-\lambda)x_2&=0.\end{aligned} \tag{2}$$

固有方程式は

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&3\\3&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-9=0. \tag{3}$$

解は $\lambda_1=8$, $\lambda_2=2$ である．$\lambda=\lambda_1=8$ に対しては，式 (2) は

$$\begin{array}{r|l} -3x_1+3x_2=0, & \text{解 } x_2=x_1,\ x_1 \text{ は任意,} \\ 3x_1-3x_2=0 & \text{たとえば } x_1=x_2=1 \end{array}$$

となる．$\lambda_2=2$ に対しては式 (2) は

$$\begin{array}{r|l} 3x_1+3x_2=0, & \text{解 } x_2=-x_1,\ x_1 \text{ は任意,} \\ 3x_1+3x_2=0 & \text{たとえば } x_1=1,\ x_2=-1 \end{array}$$

となる．ゆえに，$\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルはたとえば

$$\lambda_1 \text{に対して} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 \text{に対して} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(または 0 でない任意のスカラー倍) である．これらのベクトルが x_1 軸の正の方向となす角はそれぞれ 45° および 135° となる．この方向が求める主方向である．また固有値から，膜は主方向にそれぞれ倍率 8, 2 で膨張することがわかる (図 2.1).

したがって，主方向を新しい u_1u_2 座標系の座標軸として選び，正の u_1, u_2 の座標軸をそれぞれ x_1x_2 座標系の第 1，第 2 象限にとり

$$u_1 = r\cos\phi, \qquad u_2 = r\sin\phi$$

とおけば，変形前の円形膜の境界点の座標は $\cos\phi$, $\sin\phi$ で与えられる．変形後には

$$z_1 = 8\cos\phi, \qquad z_2 = 2\sin\phi$$

となる．$\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$ を用いると，変形後の膜の境界は楕円 (図 2.1)

$$\frac{{z_1}^2}{8^2}+\frac{{z_2}^2}{2^2}=1$$

であることがわかる．この楕円の主軸は主方向を向き，半軸の長さ 8, 2 は固有値に等しい． ◀

例 2　**マルコフ過程に現れる固有値問題**　ほかの応用として，マルコフ過程もまた固有値問題を生じることを示そう．そのため，1.2 節の例 14 の土地利用の極限状態を決定しよう．

[解]　1.2 節の例 14 はマルコフ過程に関連し，確率行列によって表現されたことを思い出そう．確率行列 $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ とは，推移確率を与える非負の成分をもち，すべての列和が 1 に等しい正方行列のことである．さらに，状態 $\boldsymbol{y}$ (列ベクトル) は状態 $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ に従って実現される．状態が変化しなくなれば，すなわち

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x} \tag{4}$$

が成立すれば，極限状態に到達することになる．これは行列 $\boldsymbol{A}$ が固有値 1 をもつことを意味する．$\boldsymbol{A}$ のすべての列和は 1 であるから，$\boldsymbol{A}$ は実際に固有ベクトル $\boldsymbol{v}=[1 \quad \cdots \quad 1]^T$ および固有値 1 をもつ．この例では，

$$
\boldsymbol{Av} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

それゆえ，式 (4) は自明でない解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ をもち，これが $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルを与える．式 (4) を $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と書きかえて成分で表すと，

$$
\begin{aligned}
-0.2x_1 + 0.1x_2 \qquad\qquad &= 0, \\
0.1x_1 - 0.3x_2 + 0.1x_3 &= 0, \\
0.1x_1 + 0.2x_2 - 0.1x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

成分の和が 100%に等しい解は $\boldsymbol{x} = [12.5 \quad 25 \quad 62.5]^T$ である．

［答］ 確率が時間とともに変化しないと仮定すれば，土地利用の最終状態は住宅用地 12.5%，商業用地 25%，工業用地 62.5%となることがわかる． ◀

例 3 人口モデルに現れる固有値問題：レスリーモデル レスリーモデルは年齢構成を考慮した人口成長モデルであるが，ここでは動物の個体数増加を記述する生態学の法則として利用しよう．ある動物集団の雌の最高寿命を 6 年とする．その集団を個体の年齢によって 2 年単位の 3 段階に分類する．この場合の “レスリー行列” は

$$
\boldsymbol{L} = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}
$$

であると仮定する．ここで，l_{1k} はある雌が第 k 級の年齢の間に産む雌の子の平均数であり，$l_{j,j-1}$ は第 $j-1$ 級の雌が生きのびて第 j 級に移る比率である．(a) 各級の最初の雌の数が 500 匹のとき，2, 4, 6 年後の各級の雌の数はいくらか．(b) どんな初期分布をとれば，各級の雌の数が同じ比率で変化するようになるか．その変化率はいくらか．

［解］ (a) 初期条件は $\boldsymbol{x}_{(0)}^T = [500 \quad 500 \quad 500]$ で，2 年後には

$$
\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{Lx}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 500 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1350 \\ 300 \\ 150 \end{bmatrix}
$$

と書ける．同様に，4 年後の各級の雌の数は $\boldsymbol{x}_{(4)}^T = (\boldsymbol{Lx}_{(2)})^T = [750 \quad 810 \quad 90]$ で与えられ，6 年後には $\boldsymbol{x}_{(6)}^T = (\boldsymbol{Lx}_{(4)})^T = [1899 \quad 450 \quad 243]$ となる．

(b) 同じ比率の変化を実現するためには，$\boldsymbol{Lx} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満足する分布ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めなければならない．ただし λ は変化率を表す (個体数は $\lambda > 1$ ならば増加し，$\lambda < 1$ ならば減少する)．固有方程式は

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I}) &= -\lambda^3 - 0.6(-2.3\lambda - 0.3 \cdot 0.4) \\
&= -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0
\end{aligned}
$$

である．1 つの正根は，(たとえば第 5 巻 1.2 節のニュートン法を用いて) $\lambda = 1.2$ と計算される．対応する固有ベクトルは，ベクトル方程式 $(\boldsymbol{L} - 1.2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ すなわち $0.6x_1 - 1.2x_2 = 0$, $0.3x_2 - 1.2x_3 = 0$ から定められる．こうして 1 つの固有ベクトル

$\boldsymbol{x}^T = [1 \quad 0.5 \quad 0.125]$ が得られる．(a) と同様に個体数の初期値を 1500 にするためには，$\boldsymbol{x}^T$ に 923 を掛ければよい．

［答］ 第 1 級 923 匹，第 2 級 462 匹，第 3 級 115 匹，成長率 1.2. ◀

例 4 **2 個の質量と 2 個のばねからなる振動系** 数個の質量とばねを含む機械系は固有値問題として扱うことができる．たとえば，図 2.2 に示された機械系の運動はつぎの連立微分方程式によって記述される．

$$\begin{aligned} y_1'' &= -3y_1 + 2(y_2 - y_1) = -5y_1 + 2y_2, \\ y_2'' &= \qquad\quad -2(y_2 - y_1) = \ \ 2y_1 - 2y_2. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，y_1, y_2 は 2 つの質量のつり合いの位置からの変位であり，y_1'', y_2'' は y_1, y_2 の時間 t に関する 2 階導関数を表す．ベクトル方程式にまとめると，

$$\boldsymbol{y}'' = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

となる．

解ベクトルとして

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\omega t} \tag{8}$$

の形のベクトルを考え，式 (7) に代入すれば

$$\omega^2 \boldsymbol{x} e^{\omega t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\omega t}$$

が得られる．両辺を $e^{\omega t}$ で割り $\omega^2 = \lambda$ とおけば，いま扱っている機械系は固有値問題

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad (\lambda = \omega^2) \tag{9}$$

に帰着することがわかる．2.1 節の例 1 によれば，行列 $\boldsymbol{A}$ は固有値 $\lambda_1 = -1$ および $\lambda_2 = -6$ をもつ．したがって，ω はそれぞれ $\omega_1 = \sqrt{-1} = \pm i$ および $w_2 = \sqrt{-6} = \pm i\sqrt{6}$ である．対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

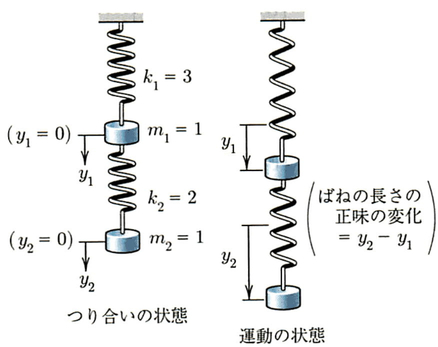


図 2.2 例 4 における機械系

となる．式 (8) からつぎの 4 つの複素解が導かれる．

$$\boldsymbol{x}_1 e^{\pm it} = \boldsymbol{x}_1(\cos t \pm i \sin t),$$
$$\boldsymbol{x}_2 e^{\pm i\sqrt{6}\,t} = \boldsymbol{x}_2(\cos\sqrt{6}\,t \pm i \sin\sqrt{6}\,t).$$

これらの和と差によってつぎの 4 つの実解が得られる．

$$\boldsymbol{x}_1 \cos t, \quad \boldsymbol{x}_1 \sin t, \quad \boldsymbol{x}_2 \cos\sqrt{6}\,t, \quad \boldsymbol{x}_2 \sin\sqrt{6}\,t$$

一般解はこれらのベクトルの 1 次結合であって，

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1(a_1 \cos t + b_1 \sin t) + \boldsymbol{x}_2(a_2 \cos\sqrt{6}\,t + b_2 \sin\sqrt{6}\,t)$$

で表される．任意定数 a_1, b_1, a_2, b_2 はそれぞれ 2 つの質量の初期変位と初速度に対応している．また，$\boldsymbol{y}$ の成分は式 (10) により

$$\begin{aligned} y_1 &= \ \ a_1 \cos t + \ \ b_1 \sin t + 2a_2 \cos\sqrt{6}\,t + 2b_2 \sin\sqrt{6}\,t, \\ y_2 &= 2a_1 \cos t + 2b_1 \sin t - \ \ a_2 \cos\sqrt{6}\,t - \ \ b_2 \sin\sqrt{6}\,t \end{aligned}$$

と書ける．これらの関数は 2 つの質量の調和振動を表現している．減衰を無視したことを考慮するとこれは当然期待される結果である．◀

❖❖❖❖❖ 問題 2.2 ❖❖❖❖❖

弾性変形　つぎに与えられた行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，弾性変形 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の主方向とその方向の膨張率ないし収縮率を求めよ．(計算の詳細を示せ．)

1. $\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 6 \end{bmatrix}$　**2.** $\begin{bmatrix} 2.0 & 0.4 \\ 0.4 & 2.0 \end{bmatrix}$　**3.** $\begin{bmatrix} 3.0 & 1.5 \\ 1.5 & 3.0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$　**5.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$　**6.** $\begin{bmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{bmatrix}$

マルコフ過程　つぎの確率行列で記述されるマルコフ過程の極限状態を見いだせ．(詳細を示せ．)

7. $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$　**8.** $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$　**9.** $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$

年齢構成を考慮した人口モデル　与えられた行列をもつレスリーモデルの成長率を見いだせ．(詳細を示せ．)

10. $\begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$　**11.** $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \end{bmatrix}$　**12.** $\begin{bmatrix} 0 & 10.4 & 4.25 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$

13. (レオンティエフ[4]の投入産出モデル)　3 つの工場は互いに産出を投入として消費しあう関係にある．その関係は 3 × 3 消費行列

4) Wassily Leontief (1906–1999)，アメリカ ニューヨーク大学の経済学者．投入産出分析で 1973 年にノーベル経済学賞を受賞した．

$$\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

によって表現される．ここで，a_{jk} は工場 j で消費される工場 k の産出の割合である．p_j を工場 j の全産出の価格とし，$\boldsymbol{p} = [\,p_1 \quad p_2 \quad p_3\,]^T$ とおく．問題は各工場の総支出が総収入と一致するように価格を設定することである．この問題が固有値問題 $\boldsymbol{Ap} = \boldsymbol{p}$ に帰着することを示し，非負の成分のみをもつ解 $\boldsymbol{p}$ を求めよ．

14. 問題 13 で考察した消費行列は，列和が 1 でつねに固有値 1 をもつことを示せ．

15. (レオンティエフの開放投入産出モデル) 問題 13 において，全産出ではなく産出の一部だけが工場間で消費される場合には，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ (問題 13 に準ずるベクトル方程式) のかわりに $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ を考えなければならない．すなわち，各工場の産出価格を $\boldsymbol{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,]^T$ とおくと，$\boldsymbol{Ax}$ は工場間で消費され，差 $\boldsymbol{y}$ が一般の消費者に役だてられる正味の産出高を与えるのである．消費行列が

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

であるとき，純産出高 $\boldsymbol{y} = [\,0.1 \quad 0.3 \quad 0.1\,]^T$ を達成するためにはどれだけの産出高 $\boldsymbol{x}$ が必要か．

16. [協同プロジェクト] 固有値と固有ベクトルの一般的性質 行列 $\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,]$ に関する諸命題を証明し，自分で選んだ適当な例を用いて説明せよ．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は $\boldsymbol{A}$ の (必ずしも異ならない) 固有値とする．

(a) **実固有値と複素固有値** $\boldsymbol{A}$ が実行列のときには，その固有値は実数または共役複素数の対からなる．

(b) **逆行列** 逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は 0 が $\boldsymbol{A}$ の固有値でないとき，またそのときに限り存在する．その固有値は $1/\lambda_1, \cdots, 1/\lambda_n$ である．

(c) **トレース** $\boldsymbol{A}$ の対角成分の和を**トレース (跡)** または**対角和**という．これは固有値の和に等しい．

(d) **"スペクトル移動"** 行列 $\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{I}$ は固有値 $\lambda_1 - k, \cdots, \lambda_n - k$ をもち，$\boldsymbol{A}$ と同じ固有ベクトルをもつ．

(e) **スカラー倍，ベキ** 行列 $k\boldsymbol{A}$ の固有値は $k\lambda_1, \cdots, k\lambda_n$ であり，行列 $\boldsymbol{A}^m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ の固有値は ${\lambda_1}^m, \cdots, {\lambda_n}^m$ である．固有関数はいずれも $\boldsymbol{A}$ の固有関数と同じである．

(f) **スペクトル写像定理 "多項式行列"**

$$p(\boldsymbol{A}) = k_m \boldsymbol{A}^m + k_{m-1} \boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + k_1 \boldsymbol{A} + k_0 \boldsymbol{I}$$

は固有値

$$p(\lambda_j) = k_m {\lambda_j}^m + k_{m-1} {\lambda_j}^{m-1} + \cdots + k_1 {\lambda_1}^{m-1} + k_0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

をもち，$\boldsymbol{A}$ と同じ固有関数をもつ．

(g) **ペロン[5)]の定理** 正の成分 l_{12}, l_{13}, l_{31}, l_{32} をもつレスリー行列 $\boldsymbol{L}$ には1つの正の固有値が存在することを示せ．(これは第5巻2.7節で述べる有名なペロン・フロベニウス[6)]の定理の特別な場合である．しかし，この定理を一般的な形で証明することは難しい.)

2.3 対称行列，交代行列，直交行列

応用面でしばしば現れる3種類の実正方行列を固有値問題の観点から改めて考察する．まず定義からはじめよう．

対称行列，交代行列，直交行列の定義

実正方行列 $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ は，転置しても変わらず

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}, \qquad \text{すなわち} \quad a_{kj} = a_{jk} \tag{1}$$

が成立するとき**対称行列**といい，転置により符号が変わり

$$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}, \qquad \text{すなわち} \quad a_{kj} = -a_{jk} \tag{2}$$

が成立するとき**交代行列**といい，転置すれば逆行列に等しく

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{3}$$

が成立するとき**直交行列**という．

例 1 **対称行列，交代行列，直交行列** 行列

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

はそれぞれ対称行列，交代行列，直交行列である (確かめよ)．すべての交代行列の対角成分は0である (証明せよ)． ◀

どんな実の正方行列 $\boldsymbol{A}$ も対称行列 $\boldsymbol{R}$ と交代行列 $\boldsymbol{S}$ の和として表される．ただし，

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T), \qquad \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T) \tag{4}$$

である．

5) Oskar Perron (1880–1975)，ドイツの数学者．ポテンシャル論におけるペロンの方法で知られる．

6) Georg Frobenius (1849–1917)，ドイツの数学者．微分方程式論におけるフロベニウスの方法のほか，行列論，群論にも重要な貢献をした．

例 2 公式 (4) の説明

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -4 & -1\\ 6 & 0 & -1\\ -3 & 13 & -4\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 6\\ -2 & 6 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -5 & 1\\ 5 & 0 & -7\\ -1 & 7 & 0\end{bmatrix}. \quad ◀$$

定理 1 (対称行列と交代行列の固有値)

(a) 対称行列の固有値は実数である．

(b) 交代行列の固有値は純虚数か 0 である．

(証明は 2.4 節にある．)

例 3 対称行列と交代行列の固有値 2.2 節の式 (1) と式 (7) の行列はいずれも対称行列で実数の固有値をもっていた．例 1 の交代行列の固有値は 0, $-25i$, $25i$ である (確認せよ)．行列

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

は実固有値 1, 5 をもつが対称行列ではない．これは定理 1 と矛盾しないだろうか． ◀

直交変換と直交行列

直交変換とは直交行列 $\boldsymbol{A}$ を係数行列としてもつ 1 次変換

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

をさす．直交変換は R^n の各ベクトル $\boldsymbol{x}$ を R^n の別のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応させる．たとえば，平面上の角 θ の回転

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{6}$$

は直交変換である．平面または 3 次元空間における任意の直交変換は，**回転** (場合によっては直線または平面による鏡映も含む) を表すことが示される．

直交行列が重要な理由はつぎの定理からわかる．

定理 2 (内積の不変性) 直交変換はベクトルの内積 (1.2 節)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} \tag{7}$$

($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は列ベクトル) を不変に保つ．したがって，直交変換は R^n におけるベクトルの大きさあるいはノルム

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} \tag{8}$$

も保存する．

［証明］　$\boldsymbol{A}$ を直交行列とし，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$ とおく．$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を示せばよい．1.2 節の式 (5) によれば $\boldsymbol{u}^T=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})^T=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T$ である．また，式 (3) から $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ もなりたつ．よって，

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{9}$$

$\|\boldsymbol{a}\|$ は内積で表されるので式 (8) も証明されたことになる．◀

直交行列のほかの重要な諸性質を定理の形にまとめておく．

定理 3 (列ベクトルおよび行ベクトルの直交性)　実正方行列が直交行列であるための必要十分条件は，その列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ が (行ベクトルも) **正規直交系**をつくること，すなわち

$$\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_k=\delta_{jk}{}^{7)}=\begin{cases}0 & (j\neq k),\\ 1 & (j=k)\end{cases} \tag{10}$$

が成立することである．

［証明］　(a)　$\boldsymbol{A}$ を直交行列とすると，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ が得られる．列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ を用いれば，

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\end{bmatrix}[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}. \tag{11}$$

したがって，$n\times n$ 単位行列 $\boldsymbol{I}$ の定義から式 (10) が導かれる．一方，式 (3) により直交行列の逆行列もまた直交行列であることがわかる (CAS プロジェクト 14)．$\boldsymbol{A}^{-1}(=\boldsymbol{A}^T)$ の列ベクトルは $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルである．よって，$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルもまた正規直交系を構成する．

(b)　逆に $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルが式 (10) を満足すれば，式 (11) の非対角成分は 0 で対角成分は 1 になるはずである．ゆえに式 (11) に示すように $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ が得られる．同様に $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$ もなりたつ．$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$ で逆行列は一意的であるから，$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$ が示される．つまり $\boldsymbol{A}$ は直交行列である．$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルが正規直交系をつくる場合にも，(a) の最後に述べた論法で同様に証明される．◀

定理 4 (直交行列の行列式)　直交行列の行列式の値は $+1$ か -1 である．

［証明］　$\det\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$ (1.7 節の定理 4) および $\det\boldsymbol{A}^T=\det\boldsymbol{A}$ (1.6 節の定理 2) を使えば，直交行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

7)　(訳注)　δ_{jk} はクロネッカーデルタとよばれる．付録 4 の脚注 1) を参照せよ．

$$1 = \det \boldsymbol{I} = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{A}^{T} = (\det \boldsymbol{A})^2$$

が得られる． ◀

例 4 **定理 3 および定理 4 の説明** 例 1 の最後の行列と式 (6) の行列はいずれも直交行列であって，定理 3 の式 (10) を満足している．また，行列式の値はそれぞれ -1, $+1$ である (定理 4)． ◀

定理 5 (直交行列の固有値) 直交行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は実数か共役複素数の対であり，それらの絶対値は 1 である．

[証明] 任意の実正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有多項式は実数の係数をもつから，その零点すなわち $\boldsymbol{A}$ の固有値は実数か共役複素数の対である．固有値の絶対値が 1 であるという命題は次節で証明したい． ◀

例 5 **直交行列の固有値** 例 1 の直交行列の固有方程式は

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

である．少なくとも 1 つの固有値は実数であるから，定理 5 により $+1$ か -1 である．試算によって 1 つの固有値は -1 であることがわかる．固有方程式を因数 $\lambda + 1$ で割れば $\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + 1 = 0$ となる．結局ほかの 2 つの固有値は $(5 + i\sqrt{11})/6$ と $(5 - i\sqrt{11})/6$ である． ◀

❖❖❖❖❖ 問題 2.3 ❖❖❖❖❖

対称行列，交代行列，直交行列とそのスペクトル つぎの行列は対称行列，交代行列，直交行列のいずれかに属するか．それらの固有値を求め，定理 1 および定理 5 と照合せよ．(推論の詳細を示せ．)

1. $\begin{bmatrix} 0.96 & -0.28 \\ 0.28 & 0.96 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} a & k & k \\ k & a & k \\ k & k & a \end{bmatrix}$

7. (交代行列) 交代行列の対角成分はすべて 0 であることを示せ．

8. (対称行列) 異なる固有値に対応する対称行列の固有ベクトルは直交することを証明せよ．その実例をあげよ．

9. (空間における回転) $\boldsymbol{A}$ を問題 4 の行列とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をデカルト座標で表示したベクトルとする．変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の幾何学的な意味を述べよ．

10. (対称行列) 直交行列でもある 3×3 対称行列は単位行列以外に存在するか．

11. (交代行列) 交代行列の逆行列もまた交代行列であることを示せ．

12. (交代行列) 正則な 3×3 交代行列は存在するか．4×4 交代行列，5×5 交代行列はどうか．

13. (直交行列) 直交行列でもある 3×3 交代行列は存在するか．

14. ［CAS プロジェクト］ 直交行列

(a) **行列積と逆行列** 2 つの直交行列の積もまた直交行列であり，直交行列の逆行列もまた直交行列であることを証明せよ．回転の場合にはこれは何を意味するか．

(b) **回転** 式 (6) が直交変換であることを示せ．それが定理 3 を満足することを確かめよ．逆変換を見いだせ．

(c) **行列のベキ** 2×2 行列 $\boldsymbol{A}$ のベキ $\boldsymbol{A}^m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ とそのスペクトルを計算するプログラムをかけ．これを問題 1 の行列 ($\boldsymbol{A}$ とする) に適用せよ．$\boldsymbol{A}$ はどんな回転を表すか．$m \to \infty$ としたとき $\boldsymbol{A}^m$ の固有値の極限は存在するか．

(d) $\boldsymbol{A}$ を問題 1 の行列として，$(0.9\boldsymbol{A})^m$ の固有値を計算せよ．その結果を点としてプロットせよ．$m \to \infty$ の極限はいくらか．これらの点はどんな曲線をたどって極限に近づくか．

(e) 変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ が平面上の反時計まわりの角 30° の回転を与えるような行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

2.4 複素行列：エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列

前節で考えた 3 種類の実正方行列を拡張して 3 種類の複素正方行列を導入しよう．これらの複素行列の固有値問題はとくに量子力学などにおける応用で重要である．

複素行列 $\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,]$ の各成分 a_{jk} をその共役複素数 $\overline{a}_{jk}$ でおきかえた行列を標準的な記号

$$\overline{\boldsymbol{A}} = [\,\overline{a}_{jk}\,]$$

で表そう．共役転置行列に対しても同様な表記を用い，

$$\overline{\boldsymbol{A}}^T = [\,\overline{a}_{kj}\,]$$

と書く．たとえば，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3+4i & -5i \\ -7 & 6-2i \end{bmatrix} \quad \text{のとき，} \quad \overline{\boldsymbol{A}}^T = \begin{bmatrix} 3-4i & -7 \\ 5i & 6+2i \end{bmatrix}.$$

エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列の定義

複素正方行列 $\boldsymbol{A} = [\,a_{jk}\,]$ は，

$$\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}, \quad \text{すなわち} \quad \overline{a}_{kj} = a_{jk}$$

ならばエルミート行列[8]といい，

8) Charles Hermite (1822–1901)，フランスの数学者．代数学と整数論における業績で知られている．偉大な Henri Poincaré (1854–1912) は彼の学生の 1 人であった．

$$\overline{\boldsymbol{A}}^T = -\boldsymbol{A}, \quad \text{すなわち} \quad \overline{a}_{kj} = -a_{jk}$$

ならば**歪**(わい)**エルミート行列**といい，

$$\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$$

ならば**ユニタリ行列**という．

これらの定義からつぎのことがわかる．$\boldsymbol{A}$ がエルミート行列の場合には，その対角成分は $\overline{a}_{jj} = a_{jj}$ を満たすのですべて実数である．同様に，$\boldsymbol{A}$ が歪エルミート行列の場合には，対角成分は $\overline{a}_{jj} = -a_{jj}$ を満足する．$a_{jj} = \alpha + i\beta$ とおけば，$\alpha - i\beta = -(\alpha + i\beta)$，したがって $\alpha = 0$ が得られる．結局 a_{jj} は純虚数か 0 になる．

例 1　エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

はそれぞれエルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列である (定義を使って確かめよ)． ◀

エルミート行列が実行列ならば $\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ となる．したがって実エルミート行列は対称行列 (2.3 節) である．

同様に，歪エルミート行列が実行列ならば $\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$ となる．したがって実歪エルミート行列は交代行列である．

最後に，ユニタリ行列が実行列ならば $\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ となる．したがって実ユニタリ行列は直交行列である．

要するに，エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列は，それぞれ対称行列，交代行列，直交行列を複素行列に拡張したものである．

固 有 値

これらの 3 種類の行列のスペクトル (固有値の集合，2.1 節参照) が，図 2.3 のように一般的に特徴づけられることは，まったく驚異的であり非常に重要である．

定理 1 (固有値)

(a) エルミート行列 (および対称行列) の固有値は実数である．

(b) 歪エルミート行列 (および交代行列) の固有値は純虚数か 0 である．

(c) ユニタリ行列 (および直交行列) の固有値の絶対値は 1 である．

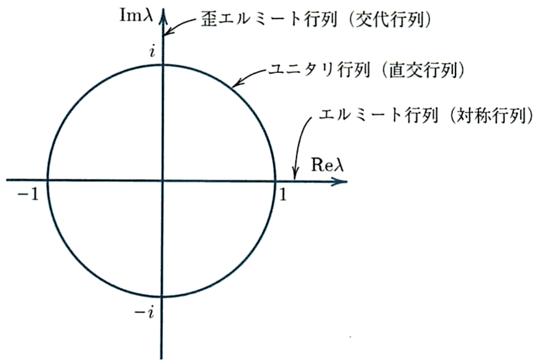


図 2.3　エルミート，歪エルミート，ユニタリ行列の固有値の複素 λ 平面上での位置づけ

例 2　定理 1 の説明　例 1 の行列の固有値問題を直接計算によって解いた結果を表にまとめておく．

行　列		固有方程式	固有値
$\boldsymbol{A}$	エルミート	$\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0$	9，2
$\boldsymbol{B}$	歪エルミート	$\lambda^2 - 2i\lambda + 8 = 0$	$4i$，$-2i$
$\boldsymbol{C}$	ユニタリ	$\lambda^2 - i\lambda - 1 = 0$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$，$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\left| \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right|^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$ ◀

[定理 1 の証明]　λ を $\boldsymbol{A}$ の 1 つの固有値，$\boldsymbol{x}$ を対応する固有ベクトルとすれば，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{1}$$

である．

(a)　$\boldsymbol{A}$ をエルミート行列とする．式 (1) に左から $\overline{\boldsymbol{x}}^T$ を掛けると，

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

となる．$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \overline{x}_1x_1 + \cdots + \overline{x}_nx_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ は実数であって，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ により 0 ではない．それゆえ $\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ で割ることができて，

$$\lambda = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

が得られる．ここで分子が実数ならば λ も実数になるはずである．$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が実数であることを証明するためには，それがその共役複素数に等しいことを示せばよい．実際，$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が数であって転置してもその値を変えないことからはじめて，$\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}$ すなわち $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^T$ と 1.2 節の式 (5) を使えば，

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}) \tag{3}$$

となる．よって，$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ は実数であり λ もまた実数である．

(b) $\boldsymbol{A}$ が歪エルミート行列のときには，$\overline{\boldsymbol{A}}^T = -\boldsymbol{A}$ かつ $\overline{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{A}^T$，したがって式 (3) の符号が変わり，

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -(\overline{\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}) \tag{4}$$

となる．複素数 $\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を $c = a + ib$ と書けば，その共役複素数は $\overline{c} = a - ib$ である．式 (4) は $a + ib = -(a - ib)$，つまり $a = -a = 0$ を意味するから，c は純虚数か 0 である．これで λ は純虚数あるいは 0 であることが証明された．

(c) $\boldsymbol{A}$ をユニタリ行列とする．式 (1) とその共役転置行列

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad (\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}})^T = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^T = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T$$

をとって，左辺と左辺，右辺と右辺を掛け合わせれば，

$$(\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = |\lambda|^2\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

が得られる．しかし，$\boldsymbol{A}$ はユニタリ行列で $\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ であるから，左辺は

$$(\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T\overline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

となる．これらの結果をまとめて $\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = |\lambda|^2\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ を得る．$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ $(\neq 0)$ で割れば，$|\lambda|^2 = 1$ すなわち $|\lambda| = 1$ が証明される．

これで 2.3 節の定理 1 と定理 5 を拡張した定理 1 が証明されたことになる． ◀

2 次形式，エルミート形式，歪エルミート形式

式 (2) の分子 $\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ の成分 $x_1, \cdots, x_n$ の**形式**とよび，$\boldsymbol{A}$ をその係数行列とよぶ．$n = 2$ のときには，

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\overline{x}_1 & \overline{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{x}_1 & \overline{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{bmatrix}$$

$$= a_{11}\overline{x}_1x_1 + a_{12}\overline{x}_1x_2 + a_{21}\overline{x}_2x_1 + a_{22}\overline{x}_2x_2$$

である．一般の n に対しては

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\overline{x}_jx_k = \quad & a_{11}\overline{x}_1x_1 + \cdots + a_{1n}\overline{x}_1x_n\\ & + a_{21}\overline{x}_2x_1 + \cdots + a_{2n}\overline{x}_2x_n\\ & \cdots\cdots\cdots\\ & + a_{n1}\overline{x}_nx_1 + \cdots + a_{nn}\overline{x}_nx_n\end{aligned} \tag{5}$$

である．この形式 (5) は n^2 個の項の和である．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{A}$ が実ならば

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k = \quad & a_{11}{x_1}^2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n\\ & + a_{21}x_2x_1 + \cdots + a_{2n}x_2x_n\\ & \cdots\cdots\cdots\\ & + a_{n1}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}{x_n}^2\end{aligned} \tag{6}$$

となる．これは**2次形式**とよばれる．2次形式の係数行列は対称行列と仮定しても一般性を失うことはない．例3で示すように，1対の非対角項 ($a_{jk}x_jx_k$ と $a_{kj}x_kx_j$) をまとめて2つの同じ係数の項の和とみなすことができるからである．2次形式はたとえば円錐曲線 (楕円 ${x_1}^2/a^2 + {x_2}^2/b^2 = 1$ など) と2次曲面に関連して物理学や幾何学にしばしば現れる．(それらの “主軸への変換” については次節で扱う.)

例 3　2次形式，対称係数行列 $\boldsymbol{C}$　2次形式

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = [\,x_1 \quad x_2\,]\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_1 + 2{x_2}^2 = 3{x_1}^2 + 10x_1x_2 + 2{x_2}^2$$

を考える．ここで $4+6=10=5+5$ である．対応する対称行列 $\boldsymbol{C} = [\,c_{jk}\,]$ では，$c_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})$ により $c_{11}=3$, $c_{12}=c_{21}=5$, $c_{22}=2$ となる．実際，

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = [\,x_1 \quad x_2\,]\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3{x_1}^2 + 5x_1x_2 + 5x_2x_1 + 2{x_2}^2 = 3{x_1}^2 + 10x_1x_2 + 2{x_2}^2$$

であって，$\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ結果を与える． ◀

式 (5) の $\boldsymbol{A}$ がエルミート行列または歪エルミート行列であるとき，式 (5) をそれぞれ**エルミート形式**または**歪エルミート形式**という．これらの形式が物理学で重要な意味をもつのはつぎのような性質のためである．

定理 1*　**(エルミート形式と歪エルミート形式)**　ベクトル $\boldsymbol{x}$ をどう選んでも，エルミート形式の値は実数であり，歪エルミート行列の値は純虚数か0である．

［証明］　式 (3) と式 (4) の証明において，実際には $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルであることは用いていないので，その証明は任意のベクトル (およびエルミート行列ないし歪エルミート行列) に対してもなりたつ．これがただちに定理の証明を与える． ◀

例 4　エルミート形式　行列 $\boldsymbol{A}$，ベクトル $\boldsymbol{x}$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \end{bmatrix}$$

ならば，

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = [\,1-i \quad -2i\,]\begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$= [\,1-i \quad -2i\,]\begin{bmatrix} 3(1+i)+(2-i)2i \\ (2+i)(1+i)+4\cdot 2i \end{bmatrix} = 34.$$ ◀

ユニタリ行列の性質，複素ベクトル空間 C^n

今度は 2.3 節の直交行列の議論をユニタリ行列に拡張しよう．すべての n 成分の実ベクトルからなり実数をスカラーとする実ベクトル空間 R^n のかわりに，すべての n 成分の複素ベクトルからなり複素数をスカラーとする**複素ベクトル空間** C^n を考える．このような複素ベクトルに対しては，**内積**を

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{b} \tag{7}$$

によって定義する．複素ベクトルの**大きさ**あるいは**ノルム**は

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{a}} \\ &= \sqrt{\overline{a}_1 a_1 + \cdots + \overline{a}_n a_n} = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}\end{aligned} \tag{8}$$

として定義される．実ベクトルの場合には式 (7) は 1.2 節で定義された内積に帰着することに注意する．

定理 2 (内積の不変性)　ユニタリ行列 $\boldsymbol{A}$ によって表現される**ユニタリ変換** $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ は，内積 (7) およびノルム (8) の値を不変に保つ．

［証明］　証明は 2.3 節の定理 2 の証明とほとんど同じである．2.3 節の式 (9) を複素ベクトルの内積と見なおして

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{v} = (\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{a}}^T\ \overline{\boldsymbol{A}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

が得られる． ◀

実ベクトルの正規直交系 (2.3 節) に対応する複素ベクトルの**ユニタリ系**が

$$\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_k = \overline{\boldsymbol{a}}_j^T \boldsymbol{a}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases} \tag{9}$$

によって定義される．2.3 節の定理 3 の複素ベクトルへの拡張はつぎのようになる．

定理 3 (列ベクトルおよび行ベクトルのユニタリ系)　正方行列はその列ベクトルが (行ベクトルも) ユニタリ系を構成するとき，またそのときに限りユニタリ行列である．

［証明］　証明は 2.3 節の定理 3 の証明と同じで，ただ $\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ が $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ にかわる点だけが違う． ◀

定理 4 (ユニタリ行列の行列式)　ユニタリ行列の行列式の絶対値は 1 である．

［証明］ 2.3 節の定理 4 の証明と同様に，

$$1=\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})=\det(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{T})=\det\boldsymbol{A}\det\overline{\boldsymbol{A}}^{T}=\det\boldsymbol{A}\det\overline{\boldsymbol{A}}$$
$$=\det\boldsymbol{A}\overline{\det\boldsymbol{A}}=|\det\boldsymbol{A}|^2.$$

よって $|\det\boldsymbol{A}|=1$ が示される．ただし $\det\boldsymbol{A}$ は直交行列の場合と異なり複素数の値をとりうることを注意したい． ◀

例 5 **定理 2–4 の説明** ベクトル $\boldsymbol{a}^T=[1\quad i]$，$\boldsymbol{b}^T=[3i\quad 2+i]$ に対しては，$\overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{b}=3i-i(2+i)=1+i$ となる．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.6i & 0.8\\ 0.8 & 0.6i\end{bmatrix}\quad ならば，\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1.4i\\ 0.2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-0.2+0.8i\\ -0.6+3.6i\end{bmatrix}$$

である．これは $(\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=1+i$ を与え，定理 2 を例証している．行列 $\boldsymbol{A}$ はユニタリ行列である．列ベクトルは

$$\overline{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{a}_1=-0.6i\cdot 0.6i+0.8^2=1,$$
$$\overline{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{a}_2=-0.6i\cdot 0.8+0.8\cdot 0.6i=0,$$
$$\overline{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{a}_2=1$$

を満足し，ユニタリ系を構成する．行ベクトルについても同様である．また $\det\boldsymbol{A}=-1$ も容易に確かめられる． ◀

❖❖❖❖❖ 問題 2.4 ❖❖❖❖❖

1. 例 2 の固有値を検算せよ．

例 1，例 2 に現れる行列の固有ベクトルを求めよ．

2. 行列 $\boldsymbol{A}$ **3.** 行列 $\boldsymbol{B}$ **4.** 行列 $\boldsymbol{C}$

エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列とそのスペクトル

問題 5–10 の行列はエルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列のいずれかに属するか．それらの固有値および固有ベクトルを求め，定理 1 を検証せよ．

5. $\begin{bmatrix}2 & 3+4i\\ 3-4i & 2\end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix}i & 1+i\\ -1+i & 0\end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & i\sqrt{\frac{3}{4}}\\ i\sqrt{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix}4i & 0 & i\\ 0 & i & 0\\ i & 0 & 4i\end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\\ 0 & i & 0\end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix}0 & 1+i & 0\\ 1-i & 0 & 1+i\\ 0 & 1-i & 0\end{bmatrix}$

11. **(分解)** 任意の正方行列はエルミート行列と歪エルミート行列の和として表されることを示せ．実例をあげよ．

12. **［プロジェクト］** **ユニタリ行列**

(a) **行列の積，逆行列** 2 つの (同型の) ユニタリ行列の積やユニタリ行列の逆行列もまたユニタリ行列であることを示せ．例をあげよ．

(b) **ユニタリ行列のベキ** 応用に現れるユニタリ行列のベキはときにはなじみ深い実行列になることがある．問題 7 の行列を $\boldsymbol{A}$ として，$\boldsymbol{A}^3 = -\boldsymbol{I}$ であることを示せ．

(c) **正規行列** この重要な概念は共役転置行列と可換な行列，すなわち $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^T = \overline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{A}$ を満足する行列 $\boldsymbol{A}$ を意味する．エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列はすべて正規行列であることを証明せよ．自分で選んだ実例によってこの命題を説明せよ．

(d) **正規行列の判定基準** 行列 $\boldsymbol{A}$ を問題 11 のように分解して得られるエルミート行列と歪エルミート行列が可換なとき，またそのときに限って $\boldsymbol{A}$ が正規行列であることを証明せよ．

(e) 正規行列ではない簡単な行列を与えよ．エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列のいずれでもない正規行列の例をあげよ．

2 次形式

つぎの 2 次形式 $Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ の対称係数行列 $\boldsymbol{C}$ を求めよ．

13. $4{x_1}^2 - 8x_1x_2 + 5{x_2}^2$

14. $-2{x_1}^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 9{x_3}^2$

15. $0.5{x_1}^2 + 0.8x_1x_2 - 1.4x_2x_3$

16. $(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4)^2$

17. $(x_1 - x_2)^2 - 4{x_3}^2$

18. $(x_1 - x_2 + 4x_3)^2 - 4(x_2 - x_4)^2$

19. **(定符号)** 実の 2 次形式 $Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ およびその対称係数行列 $\boldsymbol{C} = [\,c_{jk}\,]$ は，すべての $[\,x_1 \ \cdots \ x_n\,] \neq [\,0 \ \cdots \ 0\,]$ に対して $Q > 0$ であるとき，**正の定符号** (または**正値**) であるという．正の定符号となるための必要かつ十分な条件は，つぎの行列式がすべて正であることである (付録 1 の [B2] 参照)．

$$C_1 = c_{11}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad C_n = \det \boldsymbol{C}.$$

問題 13 の 2 次形式は正の定符号であるが，例 3 の 2 次形式は正の定符号でないことを示せ．

エルミート形式と歪エルミート形式

つぎの行列 $\boldsymbol{A}$ はエルミート行列かそれとも歪エルミート行列か．形式 $\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を求めよ．

20. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -2i \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$

21. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3-2i \\ 3+2i & -4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2i \\ 1+i \end{bmatrix}$

22. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & k \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
(a, b, c は実数)

23. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} i & -2+3i \\ 2+3i & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} i \\ 4 \end{bmatrix}$

24. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & i & 4 \\ -i & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$

25. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 2+i \\ -1 & 0 & 3i \\ -2+i & 3i & i \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2.5 行列の相似，固有ベクトルの基底，対角化

従来は固有値に重点をおいて論じてきたが，本節では固有ベクトルとその性質に観点をうつそう．$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルは R^n や C^n (2.4 節で定義した) の基底を構成する可能性がある．そのときには，固有ベクトルを使って $\boldsymbol{A}$ を "対角化" すること，すなわち $\boldsymbol{A}$ を主対角線上に固有値をもつ対角行列に変換することができる．これが本節の核心となる課題である．

固有値問題における重要な基本概念からはじめよう．

行列の相似

$n \times n$ 行列 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ は，別の $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \tag{1}$$

がなりたつような正則な $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{P}$ が存在するとき，$\boldsymbol{A}$ と**相似**であるという．$\boldsymbol{A}$ から $\widehat{\boldsymbol{A}}$ を与えるこの変換は**相似変換**とよばれる．

相似変換が重要な理由は固有値を保存することである．

定理 1 (相似行列の固有値と固有ベクトル) $\widehat{\boldsymbol{A}}$ が $\boldsymbol{A}$ と相似ならば，$\widehat{\boldsymbol{A}}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ固有値をもつ．さらに，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルならば，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ は同じ固有値に対応する $\widehat{\boldsymbol{A}}$ の固有ベクトルである．

[証明] $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ (λ は固有値，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) から $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ が得られる．$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}$ を使えば

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} = \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$$

となる．したがって，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である限り λ は $\widehat{\boldsymbol{A}}$ の固有値であり，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ は対応する固有ベクトルである．実際に $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とおけば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ という仮定に反する． ◀

固有ベクトルの性質

つぎの定理はそれ自身興味深く，固有ベクトルの基底としての役割を理解するためにも役にたつ．

定理 2 (固有ベクトルの 1 次独立性) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ を $n \times n$ 行列の異なる固有値とすると，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ は 1 次独立な組をつくる．

［証明］ この結論が偽であるとする．r を $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ が 1 次独立な組になる最大の個数とすると，$r < k$ であってしかも組 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r+1}\}$ は 1 次従属である．このとき，

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

がなりたつような，すべては 0 でないスカラー $c_1, \cdots, c_{r+1}$ が存在することになる (1.4 節)．式 (2) に左から $\boldsymbol{A}$ を掛け $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \lambda\boldsymbol{x}_j$ を用いて，

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

を得る．左辺の最終項を除くために式 (2) の λ_{r+1} 倍を引くと，

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}.$$

$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ の 1 次独立性から $c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = 0$，$\cdots$，$c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$ でなければならない．さらに，すべての固有値は互いに異なるので $c_1 = \cdots = c_r = 0$ が導かれる．このため式 (2) は $c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{0}$ に帰着するが，$\boldsymbol{x}_{r+1} \neq \boldsymbol{0}$ (固有ベクトル) により $c_{r+1} = 0$ となる．これは式 (2) のすべてのスカラーが 0 ではないという仮定と矛盾する．ゆえに定理の結論は成立する． ◀

この定理からただちにつぎの定理が得られる．

定理 3 (固有ベクトルの基底) $n \times n$ 行列が異なる固有値をもつとき，$\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルは C^n (または R^n) の基底を構成する．

例 1 固有ベクトルの基底 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ はそれぞれ固有値 $\lambda_1 = 8$，$\lambda_2 = 2$ に対応する固有ベクトルの基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ をもつ (2.2 節の例 1)． ◀

例 2 すべての固有値が異ならない場合の基底：基底の不存在 n 個の固有値が必ずしも異ならないときでも，行列 $\boldsymbol{A}$ は C^n や R^n における固有ベクトルの基底を与えることがある．$n = 3$ の場合の実例が 2.1 節の例 2 にある．しかし，$\boldsymbol{A}$ が基底を構成するだけの十分な個数の 1 次独立な固有ベクトルをもたないこともある．たとえば，2.1 節の例 3 の行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の固有ベクトルは $\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$ ($k \neq 0$ は任意) だけしかない．したがって $\boldsymbol{A}$ は R^2 に対する固有ベクトルの基底を与えない． ◀

実際には，固有ベクトルの基底は定理 3 よりもはるかに一般的な条件のもとで存在する．前節で述べた複素行列の場合には固有ベクトルのユニタリ系を基底として選ぶことができる．

定理 4 (固有ベクトルの基底)　エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列は，C^n に対してユニタリ系 (2.4 節) を構成する固有ベクトルの基底を与える．対称行列は R^n に対して正規直交系を構成する固有ベクトルの基底を与える．(証明については付録 1 の [B2] を参照せよ．)

例 3 固有ベクトルの正規直交基底　例 1 の行列は対称行列であり，固有ベクトルの正規直交基底は $[1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]^T$，$[1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}]^T$ である． ◀

行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルの基底は，1 次変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を扱うときにとくに有用である．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は基底 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を用いて一意的に

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

と表すことができるからである．$\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルが (必ずしも異ならない) 固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対応しているときには，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n) \\ &= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \\ &= c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{x}_n. \end{aligned} \tag{4}$$

この式の利点は，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対する $\boldsymbol{A}$ の複雑な作用を，$\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルに対する簡単な作用 (スカラー倍) の和に分解できたことである．

対角化

固有ベクトルの基底は $n \times n$ 行列の対角化においても中心的な役割を果たす．

定理 5 (行列の対角化)　$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が固有ベクトルの基底をもつとき，

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \tag{5}$$

は $\boldsymbol{A}$ の固有値を対角成分とする対角行列である．ここで $\boldsymbol{X}$ は固有ベクトルを列ベクトルとする行列である．また，

$$\boldsymbol{D}^m = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{X} \qquad (m = 2, 3, \cdots) \tag{5*}$$

もなりたつ．

例 4 行列の対角化 (定理 5 の説明)　2.1 節の諸例と同様な計算の結果，行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ であるから，

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と書ける．また 1.7 節の式 (4*) を使って，

$$X^{-1}AX = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が得られる．$\boldsymbol{X}$ の列を交換すれば $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ に何が起こるか．◀

[定理 5 の証明]　$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ はそれぞれ固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルであって，C^n (または R^n) の基底を構成するものとしよう．そのとき，$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{x}_n]$ は 1.4 節の定理 1 により階数 n をもつ．ゆえに，1.7 節の定理 1 から逆行列 $\boldsymbol{X}^{-1}$ が存在することがわかる．さて，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \lambda_n\boldsymbol{x}_n] \qquad (6)$$

がなりたつ．最後の等式は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \lambda\boldsymbol{x}_j$ から導かれる．第 2 の等式を理解するためには，$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ と書いて，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{x}_1 \end{bmatrix}$$

が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ の第 1 列である (1.2 節の式 (8) と比較せよ) ことに注目すればよい．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ のほかの $n-1$ 個の列についても同様である．ここで，$\boldsymbol{A}$ の固有値を成分とする対角行列 $\boldsymbol{D} = [\lambda_j\delta_{jk}]$ を導入すれば，$[\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \lambda_n\boldsymbol{x}_n] = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}$ が成立することが直接計算によって示される．(まず $n = 2$ に対して試みたあと一般の n に対して拡張せよ[9])．これと式 (6) から $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}$ が得られる．$\boldsymbol{X}^{-1}$ を左から掛けた積は $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}$ となり，式 (5) と一致する．なお，式 (5*) はつぎのようにして証明される．

$$\boldsymbol{D}^2 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X} \quad \text{など．}$$ ◀

例 5　**行列の対角化**　行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 & -3.7 \\ -11.5 & 1.0 & 5.5 \\ 17.7 & 1.8 & -9.3 \end{bmatrix}.$$

[解]　固有行列式は固有方程式 $-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0$ を与える．その根 ($\boldsymbol{A}$ の固有値) は $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = -4$，$\lambda_3 = 0$ である．$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の値を与えてガウス消去法を適用し，その後ガウス・ジョルダン消去法 (1.7 節の例 1) によって $\boldsymbol{X}^{-1}$ を求める．結果はつぎのとおりである．

---

9)　(訳注)　$n = 2$ の場合にはつぎのようになる．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \text{ として } \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{21} \\ \lambda_1 x_{12} & \lambda_2 x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{AX}$ を計算して左から $\boldsymbol{X}^{-1}$ を掛けると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX} \\ &= \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. ◀

形式の主軸変換

主軸変換は行列の対角化に関連して実際上重要な課題である. 2 次形式 (2.4 節)

$$Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \tag{7}$$

を対象として考え方を説明しよう. 一般性を失わずに $\boldsymbol{A}$ を対称行列と仮定することができる (2.4 節). そのとき定理 4 により $\boldsymbol{A}$ は n 個の固有ベクトルの正規直交基底を与える. 固有ベクトルを列ベクトルとしてもつ行列 $\boldsymbol{X}$ は直交行列なので, $\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}^T$ がなりたつ. ゆえに, 式 (5) から $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{XDX}^{-1} = \boldsymbol{XDX}^T$ が得られる. これを式 (7) に代入すれば

$$Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{XDX}^T \boldsymbol{x} \tag{8}$$

となる. $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とおけば, $\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X}^{-1}$ を考慮して

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{y} \tag{9}$$

を得る. さらに, 式 (8) において $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{y}^T$ しかも $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であるから, Q は簡単に

$$Q = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2 \tag{10}$$

と書ける. このようにしてつぎの定理が証明される.

定理 6 (主軸定理)　主軸変換 (9) は 2 次形式

$$Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k$$

を標準形 (10) に変換する．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は対称行列 $\boldsymbol{A}$ の (必ずしも異ならない) 固有値であり，$\boldsymbol{X}$ は対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を列ベクトルとする直交行列である．

例 6　主軸変換：円錐曲線　2 次形式

$$Q = 17{x_1}^2 - 30x_1x_2 + 17{x_2}^2 = 128$$

の標準形を求めよ．これはどんな円錐曲線を表すか．

［解］　この 2 次形式 $Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ に対しては，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

これは固有方程式 $(17-\lambda)^2 - 15^2 = 0$ を与える．その根は $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 32$ である．したがって，式 (10) は

$$Q = 2{y_1}^2 + 32{y_2}^2$$

と書ける．$Q = 128$ のときには，$2{y_1}^2 + 32{y_2}^2 = 128$ すなわち

$$\frac{{y_1}^2}{8^2} + \frac{{y_2}^2}{2^2} = 1$$

で表される楕円が得られる．x_1x_2 座標系における主軸の方向を知るためには，$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ から $\lambda = \lambda_1 = 2$ および $\lambda = \lambda_2 = 32$ に対応する単位固有ベクトルを決めなければならない．計算の結果は

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

である．よって，式 (9) は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1/\sqrt{2} - y_2/\sqrt{2}, \\ x_2 &= y_1/\sqrt{2} + y_2/\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる．これは 45° の回転である．この結果は実質的には 2.2 節の例 1 と同じである．その例の図 2.1 を参照するとよい．◀

❖❖❖❖❖　問題 2.5　❖❖❖❖❖

相似行列のスペクトル

つぎに与えられた $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}$ に対して $\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．$\widehat{\boldsymbol{A}}$ の固有値を求め，$\boldsymbol{A}$ の固有値と一致することを確かめよ．$\widehat{\boldsymbol{A}}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を求め，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルに等しいことを示せ．(計算の詳細を示せ.)

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$　**2.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.96 \\ -0.96 & 0.28 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$　**4.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & 9 & -10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

固有ベクトルのユニタリ基底

ユニタリ系を構成する固有ベクトルの基底を求めよ．(詳細を示せ.)

7. $\begin{bmatrix} 0 & 3i \\ -3i & 0 \end{bmatrix}$　**8.** $\begin{bmatrix} 4 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}$　**9.** $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$

対角化

固有ベクトルの基底を見いだし対角化せよ．(詳細を示せ.)

10. $\begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix}$　**11.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$　**12.** $\begin{bmatrix} -43 & 77 \\ 13 & 93 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 48 & -8 & 0 \\ 84 & -24 & 4 \end{bmatrix}$　**14.** $\begin{bmatrix} -2.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -4 & 6 \\ -6 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 2$　**15.** $\begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

2 次形式の主軸変換：円錐曲線

与えられた 2 次形式はどのような円錐曲線 (1 対の直線を含む) を表すか．標準形に変換せよ．例 6 と同様にして $\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2]$ を新しい座標ベクトル $\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ で表せ．

16. $-11{x_1}^2 + 84x_1x_2 + 24{x_2}^2 = 156$　**17.** $7{x_1}^2 + 6x_1x_2 + 7{x_2}^2 = 200$

18. $41{x_1}^2 - 24x_1x_2 + 34{x_2}^2 = 0$　**19.** $9{x_1}^2 - 6x_1x_2 + {x_2}^2 = 40$

20. $4{x_1}^2 + 12x_1x_2 + 13{x_2}^2 = 16$　**21.** $32{x_1}^2 - 60x_1x_2 + 7{x_2}^2 = -52$

22. ［プロジェクト］ **行列の相似**　相似性の概念は数値計算法の設計などにおいて基本的である．

(a) **トレース**　行列 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ は固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもつとする．定義によれば，トレースは

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

で与えられる．これが

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

と表せることを示せ．ただし，各固有値はその代数的重複度と同じ回数だけ加算するものとする．

(b) **積のトレース**　行列 $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ を $n \times n$ 正方行列とする．まず

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{AB} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{li} = \operatorname{tr} \boldsymbol{BA}$$

を証明することによって，相似行列のトレースが互いに等しいことを示せ．

(c) 式 (1) の $\widehat{\boldsymbol{A}}$ と $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$ の間の関係を見いだせ．

(d) **対角化**　$\boldsymbol{D}$ の固有値の順序を入れかえると式 (5) はどう変わるか．$d_{11} = \lambda_1$ と $d_{22} = \lambda_2$ を交換する場合を例として答えよ．

2章の復習

1. "固有値" と "固有ベクトル" の定義を記憶だけで述べよ．

2. 固有値をもたない正方行列は存在するか．0 は固有値になりうるか．実行列の固有値は複素数になることがあるか．

3. 複素行列は実数の固有値や実数成分の固有ベクトルをもちうるか．

4. 固有値の代数的重複度と幾何的重複度とは何か．この概念はなぜ重要か．

5. 固有ベクトル基底とは何か．それはどんな場合に存在するか．

6. 本章では 3 種類の実行列と 3 種類の複素行列について論じた．それらの定義とおもな性質を記憶だけで述べよ．

7. どんな場合に直交固有ベクトルが期待されるか．

8. スペクトル写像定理とは何か．それを説明する実例を示せ．

9. 固有値問題を生じるいくつかの典型的な応用を与えよ．

10. 逆行列の固有値について知っていることを述べよ．

固有値と固有ベクトル　スペクトルと固有ベクトルを求めよ．(計算の詳細を示せ．)

11. $\begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$　**12.** $\begin{bmatrix} -28 & 16 \\ -48 & 28 \end{bmatrix}$　**13.** $\begin{bmatrix} 0.35 & 0.30 \\ 0.30 & -0.10 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$　**15.** $\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$　**16.** $\begin{bmatrix} 9 & -10 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

対角化　固有ベクトルの基底を見いだし，行列を対角化せよ．(詳細を示せ．)

17. $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$　**18.** $\begin{bmatrix} 15 & 6 & -12 \\ 4 & 10 & -2 \\ -4 & 8 & -7 \end{bmatrix}$　**19.** $\begin{bmatrix} -8 & 11 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -4 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

円錐曲線と主軸変換　つぎの 2 次形式を標準形に変換せよ．$[x_1 \quad x_2]^T$ を新しい変数によって表せ．(詳細を示せ．)

20. $2{x_1}^2 + 12x_1x_2 - 7{x_2}^2 = 10$　**21.** $9{x_1}^2 - 6x_1x_2 + 17{x_2}^2 = 72$

22. $5{x_1}^2 + 24x_1x_2 - 5{x_2}^2 = 0$　**23.** $7.4{x_1}^2 + 6.4x_1x_2 + 2.6{x_2}^2 = 9$

24. (パウリのスピン行列)　パウリのスピン行列の固有値と固有ベクトルを求め，$\boldsymbol{S}_x\boldsymbol{S}_y = i\boldsymbol{S}_z$，$\boldsymbol{S}_y\boldsymbol{S}_x = -i\boldsymbol{S}_z$，${\boldsymbol{S}_x}^2 = {\boldsymbol{S}_y}^2 = {\boldsymbol{S}_z}^2 = \boldsymbol{I}$ を導け．ただし，

$$\boldsymbol{S}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とする．

2章のまとめ

行列の固有値問題の実用上の重要性は，どれだけ評価しても過大評価となることはない．これはベクトル方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{1}$$

によって定義される．$\boldsymbol{A}$ は与えられた正方行列である．本章ではすべての行列は正方行列とする．λ はスカラーである．式 (1) を解くということは，式 (1) が自明でない解 $\boldsymbol{x}$ をもつような λ の値を決定することを意味する．この λ の値を $\boldsymbol{A}$ の**固有値** (または**特性値**)，対応するベクトル $\boldsymbol{x}$ を**固有ベクトル**とよぶ．$n \times n$ 行列は少なくとも 1 つ，高々 n 個の数値的に異なる固有値をもつ．これは固有方程式 (2.1 節)

$$D(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

の解である．$D(\lambda)$ は $\boldsymbol{A}$ の**固有行列式**とよばれる．これを展開して得られる λ の n 次多項式を $\boldsymbol{A}$ の**固有多項式**という．いくつかの典型的な応用が 2.2 節に示されている．

2.3 節では，**対称行列** ($\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$)，**交代行列** ($\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$)，**直交行列** ($\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$) に対する固有値問題を扱う．対応する複素行列としての**エルミート行列** ($\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}$)，**歪エルミート行列** ($\overline{\boldsymbol{A}}^T = -\boldsymbol{A}$)，**ユニタリ行列** ($\overline{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$) の固有値問題が 2.4 節の主題である．エルミート行列 (および対称行列) のすべての固有値は実数である．歪エルミート行列 (および交代行列) に対しては，固有値は純虚数か 0 である．ユニタリ行列 (および直交行列) に対しては，固有値の絶対値は 1 である．

2.5 節で説明したように，行列の対角化や主軸変換も固有値問題に関連している．

3

ベクトルの微分法：勾配，発散，回転

本章では 3 次元空間におけるベクトルとベクトル関数を導入し，これらのベクトル関数に対して微分法を展開する．力，速度やその他の多くの物理量はベクトルである．したがって，ベクトル関数の代数および解析は，固体力学，流体力学，熱流，静電気などの諸分野において，物理学者や工学者のための自然な道具を提供する．航空機，レーザー機器，熱機関，ロボットなどの設計製作に携わる技術者も，システム設計の基礎としてベクトル解析を理解しておかなければならない．3 次元の場合には，多次元の場合と違って幾何学的な思考が有力で理論を豊かにするが，幾何学的な諸量 (たとえば接線や法線) もまたベクトルとして与えられるのである．

3.1–3.3 節では，まず準備として 3 次元空間ベクトルの基本的な代数演算を説明する．ベクトルの微分法は 3.4 節からはじまる．3.4 節では，ベクトル場を表現し物理学や幾何学への応用の広いベクトル関数の概念を導入し，ついでベクトル関数の微分法を簡潔で自然な形で展開する．3.5–3.7 節では，ベクトル関数が曲線および力学における物体の運動の経路を学ぶために有用であることを示す．

最後に，ベクトル場に関連した物理的にも幾何的にも重要な 3 つの概念，すなわち勾配 (3.9 節)，発散 (3.10 節)，回転 (3.11 節) について論じる．(これらの概念を含む積分定理はベクトルの積分法を主題とする 4 章で扱うことにする．これらの諸量の曲線座標による表示は付録 A3.3 に与えられている.)

本章は 1 章や 2 章とは独立した[1]書き方になっている．

本章を学ぶための予備知識：3.3 節では 2 次と 3 次の行列式を使う．
短縮コースでは省略してもよい節：3.6–3.8，3.12 節．
参考書：付録 1.
問題の解答：付録 2.

---

1)　1 章を学習ずみの読者は本章の議論が 1 章と整合していることに気づくと思う．2 次元，3 次元だけに限ったのは，物理的，工学的，幾何的などの実際的な応用に直結させるためである．

3.1 2次元および3次元空間におけるベクトル代数

物理学や幾何学とその工業的な応用においては，スカラーとベクトルという2種類の量が用いられる．**スカラー**とは大きさだけで完全に指定される量のことである．ここで大きさというのは，適当な尺度によって何単位あるかを測った数を意味する．たとえば，長さ，温度，電気抵抗などはスカラーである．

ベクトルは大きさと方向によって決定される量である．これは矢印あるいは**有向線分**で表すことができる．たとえば力はベクトルである．速度もベクトルであって，その大きさは速さ，方向は運動の方向である (図 3.1)．

今後，ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}$ のように小文字の太文字[2)]で表すことにする．

有向線分の始点をベクトルの**始点**，有向線分の終点をベクトルの**終点**という．図 3.2 は平面内の 3 角形の**平行移動** (回転なしの変位) を示している．平行移動を表すベクトル $\boldsymbol{a}$ の始点 P は移動前の点の位置であり，終点 Q は移動後の点の位置である．

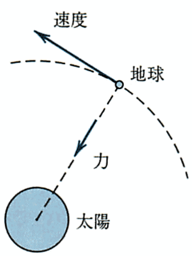


図 3.1　力と速度

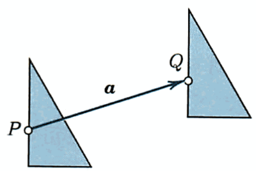


図 3.2　平行移動

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**大きさ**または**長さ**は $\boldsymbol{a}$ の**ノルム** (**ユークリッドノルム**の略) とよばれ $|\boldsymbol{a}|$ で表す．

大きさ 1 のベクトルを**単位ベクトル**という．

もちろん，われわれはベクトルについて演算を行いたいのである．たとえば，力の合力を求めたり，大きさや方向の異なる力を比較したいことがある．そのため，まずベクトルの相等と成分の概念を定義し，つぎにベクトルの和とスカラー倍という 2 つの基本的な代数演算を導入しよう．

---

2) これは印刷物での習慣であって，手書きの場合には矢印をつけて $\vec{a}$ ($\boldsymbol{a}$ のかわりに)，$\vec{b}$ などと書いてもよい．

ベクトルの相等

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が同じ大きさと同じ方向をもつとき，それらは**等しい**といい $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ と書く (図 3.3)．したがって，ベクトルは任意に平行移動してもよい．いいかえれば，ベクトルはその始点を任意に選ぶことができる．この定義は力などへの応用に関連する実際的なものである．

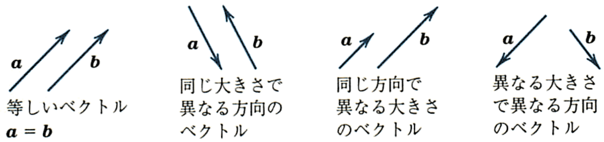


図 3.3　ベクトル

ベクトルの成分

幾何学的なベクトルを代数的に表現するために，3 次元空間における**デカルト**[3)]**座標系** (図 3.4)，すなわち互いに垂直な 3 つの座標軸をもつ通常の直交座標系を選ぶ．与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ の始点 P の座標を (x_1, y_1, z_1)，終点 Q の座標を (x_2, y_2, z_2) とする．このとき，3 つの数 (図 3.5)

$$a_1 = x_2 - x_1, \qquad a_2 = y_2 - y_1, \qquad a_3 = z_2 - z_1 \tag{1}$$

をこの座標系に関する $\boldsymbol{a}$ の**成分**とよび，簡単に

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]$$

と書く．

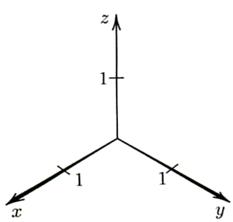


図 3.4　デカルト座標系

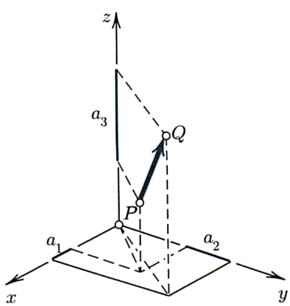


図 3.5　ベクトルの成分

3) René Descartes (1596–1650)，フランスの哲学者で数学者．解析幾何学を創始した．彼の主著「幾何学」は「方法叙説」の付録として 1637 年に発行された．

ベクトルの大きさの成分表示

定義により，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ は始点 P と終点 Q の間の距離である．式 (1) とピタゴラスの定理から

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \tag{2}$$

が導かれる．

例 1 ベクトルの成分と大きさ 始点 $P:(4,0,2)$，終点 $Q:(6,-1,2)$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ は成分

$$a_1 = 6-4 = 2, \qquad a_2 = -1-0 = -1, \qquad a_3 = 2-2 = 0$$

をもつから，$\boldsymbol{a} = [2,-1,0]$ である．(図 3.5 のように $\boldsymbol{a}$ を図示できないか.) 式 (2) により，$\boldsymbol{a}$ の大きさは

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

である．もしも $\boldsymbol{a}$ の始点として $(-1,5,8)$ を選べば，終点は $(1,4,8)$ となる．

原点 $(0,0,0)$ を $\boldsymbol{a}$ の始点にとれば，対応する終点の座標は $(2,-1,0)$ となり，$\boldsymbol{a}$ の成分と一致する．これは空間内の各点をベクトルとして表現できることを示している．◀

位置ベクトル

あるデカルト座標系が与えられたとき，点 $A:(x,y,z)$ の**位置ベクトル** $\boldsymbol{r}$ は，原点 $(0,0,0)$ を始点とし A を終点とするベクトルである (図 3.6)．式 (1) からただちに $\boldsymbol{r} = [x,y,z]$ が得られる．

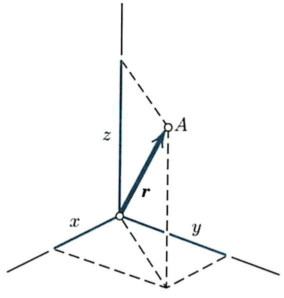


図 3.6 点 $A:(x,y,z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

さらに，始点 P から終点 Q に向かうベクトル $\boldsymbol{a}$ を平行移動させたとすると，対応する P, Q の座標は同じ値だけ変わるので，式 (1) の各成分は不変に保たれるはずである．こうしてつぎの定理が証明される．

定理 1 (実数の順序 3 つ組としてのベクトル)　固定したデカルト座標系を与えたときには，各ベクトルは対応する成分の順序 3 つ組として一意的に決定される．逆に，実数の順序 3 つ組 (a_1, a_2, a_3) に対応してただ 1 つのベクトル $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]$ が存在する．とくに，大きさ 0 で方向のない**零ベクトル**には原点 (0, 0, 0) が対応する．

ゆえに，ベクトル式 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ は成分に対する 3 つの等式 $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ と同値である．

ベクトルの有向線分としての "幾何的" な定義から出発して，定理 1 による "代数的" な表現に到達することがわかった．この手続きを逆転して代数的な定義[4)]から出発することもできるだろう．この 2 つの立場は同等であることが示されたのである．

ベクトルの和，スカラー倍

実際上有用でしかも数の演算と同様に簡単なベクトルの代数演算が応用からの要請により考案されている．

定義 1 ベクトルの和　2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3]$ の**和** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は，対応する成分を加えることによって得られ，

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3] \tag{3}$$

として与えられる．幾何学的には，図 3.7 のように $\boldsymbol{b}$ の始点を $\boldsymbol{a}$ の終点と重ねたとき，和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の始点から $\boldsymbol{b}$ の終点に向かうベクトルである．

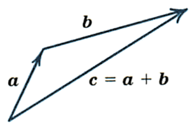


図 3.7　ベクトルの和

力の場合には，ベクトルの和の定義は 2 つの力の**合力**に関する**平行 4 辺形の法則**を表している (図 3.8).

ベクトルの和の "代数的" 定義と "幾何的" 定義が同じ結果を与えることを図 3.9 に (平面上で) 示した．

---

4)　これは 1 章と同じ見方である (本章では用いない).

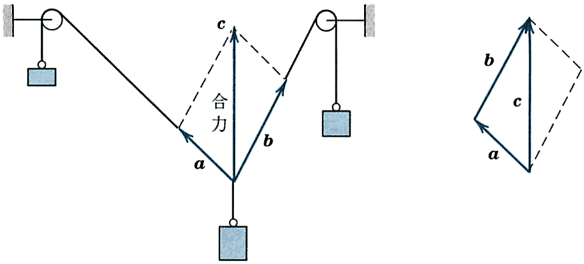


図 3.8　2 力の合力 (平行 4 辺形の法則)

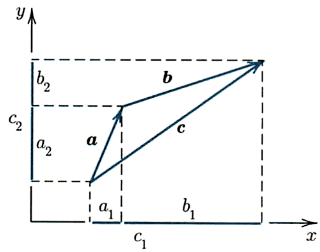


図 3.9　ベクトルの和と成分

ベクトルの和の基本的性質　　ベクトルの和は実数の場合と同様なよく知られた法則に従う (図 3.10，図 3.11).

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \qquad \text{(交換法則)} \tag{4a}$$

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}), \qquad \text{(結合法則)} \tag{4b}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \tag{4c}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}. \tag{4d}$$

ここで，$-\boldsymbol{a}$ は大きさが $|\boldsymbol{a}|$ で $\boldsymbol{a}$ と反対方向のベクトルを表す.

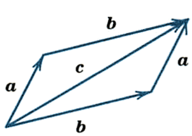


図 3.10　ベクトルの和の交換法則

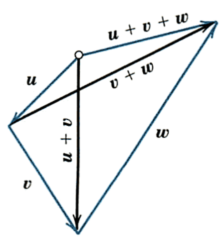


図 3.11　ベクトルの和の結合法則

式 (4b) では括弧をはずして簡単に $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ と書くことができる．4 つ以上のベクトルの和についても同様である．また，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ のかわりに $2\boldsymbol{a}$ と書く．このことと前に使った $-\boldsymbol{a}$ という記号の意味から，ベクトルの第 2 の代数演算すなわちベクトルのスカラー倍の定義が得られる．

定義 2　スカラー倍 (実数との積)　$\boldsymbol{a}=[a_1, a_2, a_3]$ を任意のベクトル，c を任意のスカラー (実数) とすれば，$\boldsymbol{a}$ のスカラー倍 $c\boldsymbol{a}$ は各成分を c 倍することによって得られ，

$$\boxed{c\boldsymbol{a}=[ca_1, ca_2, ca_3]} \tag{5}$$

で与えられる．幾何学的には，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $c>0$ ならば $c\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ方向をもち，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $c<0$ ならば $c\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と反対の方向をもつ．いずれにせよ $c\boldsymbol{a}$ の大きさは $|c\boldsymbol{a}|=|c||\boldsymbol{a}|$ である．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ か $c=0$ ならば (あるいは両方ともなりたてば)，$c\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である (図 3.12)．

ベクトルのスカラー倍の基本的性質　定義 1, 2 からただちにつぎの性質が得られる．

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b}, \tag{6a}$$

$$(c+k)\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}, \tag{6b}$$

$$c(k\boldsymbol{a})=(ck)\boldsymbol{a} \qquad (ck\boldsymbol{a} \text{ と書ける}), \tag{6c}$$

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}. \tag{6d}$$

式 (4) と式 (6) により，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して

$$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}, \tag{7a}$$

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a} \tag{7b}$$

が証明される．$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ のかわりに簡単に $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ と書く (図 3.13)．

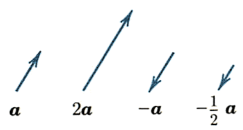


図 3.12　ベクトルのスカラー倍

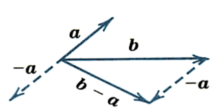


図 3.13　ベクトルの差

例 2　ベクトルの和とスカラー倍　与えられた座標系に対して，

$$\boldsymbol{a}=[4,0,1], \qquad \boldsymbol{b}=[2,-5,\tfrac{1}{3}]$$

とすれば，$-\boldsymbol{a}=[-4,0,-1]$，$7\boldsymbol{a}=[28,0,7]$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[6,-5,\tfrac{4}{3}]$ であり，また

$$2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2[2,5,\tfrac{2}{3}]=[4,10,\tfrac{4}{3}]=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$$

となる．◀

単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$

ベクトルのよく知られた別の表示

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \tag{8}$$

にうつろう．ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はデカルト座標系において 3 つの座標軸の正の方向を向く単位ベクトルである (図 3.14)．したがって，

$$\boldsymbol{i} = [1, 0, 0], \quad \boldsymbol{j} = [0, 1, 0], \quad \boldsymbol{k} = [0, 0, 1] \tag{9}$$

であり，表示 (8) の右辺は 3 つの座標軸に平行な 3 つのベクトルの和となる．

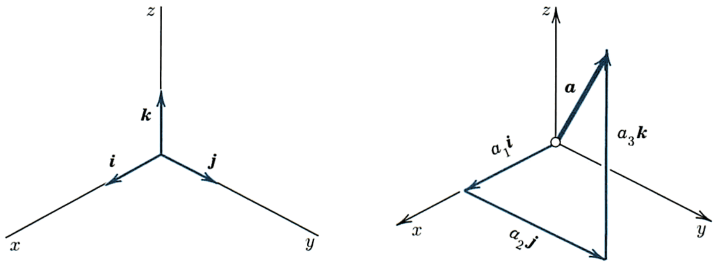


図 3.14 単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と表示 (8)

例 3 ベクトルの $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ による表示 例 2 では $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}$ となる． ◀

ベクトル空間 R^3 [選択]

いま考えているベクトル全体の集合は，ベクトルの和とスカラー倍という 2 種類の代数演算に関して 3 次元の実ベクトル空間を構成することを指摘したい．この "次元" を説明するためには 1 次独立の概念が必要である．与えられたベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \boldsymbol{a}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ の **1 次結合**とは，任意のスカラー $c_1, \cdots, c_m$ を係数とする表式

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

を意味する．明らかにこれもまたベクトルである．与えられたベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ は，

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

のただ 1 組の解が $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ であるとき **1 次独立**であるという．もし式 (10) がすべては 0 でないスカラーに対してもなりたてば，これらの m

個のベクトルは **1 次従属**であるという．R^3 の 4 個以上のベクトルはつねに 1 次従属であるが，R^3 は 3 個の 1 次独立なベクトルの組を含むので，1 次独立な組をつくるベクトルの最大個数は 3 である．この数 3 が R^3 の**次元**とよばれ，このような 1 次独立なベクトルの組が R^3 の**基底**とよばれる．"**標準基底**"(9) はとくに有用である．任意の基底が与えられれば，R^3 のすべてのベクトルは基底ベクトルの 1 次結合として一意的に表すことができる．表示 (8) はその実例である．

ベクトル空間 R^3 は 1.8 節で論じた一般のベクトル空間 (本章では必要でない) の原型である．

❖❖❖❖❖　問題 3.1　❖❖❖❖❖

成分と大きさ

始点 $P:(x_1, y_1, z_1)$ と終点 $Q:(x_2, y_2, z_2)$ が与えられたベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分を求めよ．大きさ $|\boldsymbol{v}|$ を見いだせ．$\boldsymbol{v}$ を図示せよ．

1. $P:(1,1,0)$, $Q:(4,5,0)$

2. $P:(2,3,0)$, $Q:(1,7,3)$

3. $P:(1,2,3)$, $Q:(2,4,6)$

4. $P:(5,-1,3)$, $Q:(-5,1,-3)$

5. $P:(4,-4,0)$, $Q:(0,0,0)$

6. $P:(0,0,0)$, $Q:(a,b,c)$

7. $P:(3,9,1)$, $Q:(3,-9,1)$

8. $P:(4,0,-2)$, $Q:(2,0,-4)$

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分 v_1, v_2, v_3 と始点 P を与えて，対応する $\boldsymbol{v}$ の終点 Q と大きさ (ノルム) $|\boldsymbol{v}|$ を定めよ．

9. $2, 3, 0,\quad P:(1,0,0)$

10. $0, 2, -3,\quad P:(0,-2,4)$

11. $3, 8, -1,\quad P:(-3,-8,1)$

12. $0, 0, 0,\quad P:(3,-1,-2)$

13. $\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\quad P:(1,\frac{1}{2},-4)$

14. $3, -1, 6,\quad P:(0,0,0)$

ベクトルの和，スカラー倍

$\boldsymbol{a}=[3,-2,1]=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=[0,3,0]=3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=[4,1,-1]=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ として，つぎのベクトル (またはスカラー) を求めよ．

15. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$

16. $-\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{a}$, $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$

17. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

18. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

19. $4\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{c}$, $4(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c})$

20. $(1/|\boldsymbol{a}|)\boldsymbol{a}$, $(1/|\boldsymbol{b}|)\boldsymbol{b}$

21. $6\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}$, $3(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$

22. $5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$

23. 問題 15, 17, 19 はどんな法則を説明するか．

力

合力の成分と大きさを求めよ．

24. $\boldsymbol{p}=[0,1,2]$, $\boldsymbol{q}=[3,-1,4]$, $\boldsymbol{u}=[2,0,2]$, $\boldsymbol{v}=[3,-3,0]$

25. $\boldsymbol{p}=[4,-2,-3]$, $\boldsymbol{q}=[8,8,1]$, $\boldsymbol{u}=[-12,-6,2]$

26. $\boldsymbol{p}=[1,0,-3]$，$\boldsymbol{q}=[5,-5,2]$，$\boldsymbol{u}=[-6,-5,1]$

27. $\boldsymbol{p}=[3,5,7]$，$\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{u}=-6\boldsymbol{p}$

28. $\boldsymbol{p}=[8,0,1]$，$\boldsymbol{q}=[4,0,6]$，$\boldsymbol{u}=[0,0,9]$

29. $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}=[3,2,0]$，$\boldsymbol{u}=[-2,4,0]$ がつり合うように $\boldsymbol{p}$ を定めよ．

30. $|\boldsymbol{p}|=6$，$|\boldsymbol{q}|=4$ のとき，合力の大きさと方向についてどんなことがいえるか．合力 $4\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$ についてはどうか．

31. $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}=[4,0,8]$，$\boldsymbol{u}=[2,-2,6]$，$\boldsymbol{v}=[-1,1,3]$ の合力が xy 平面と平行になるように $\boldsymbol{p}=[0,0,p_3]$ を定めよ．

32. $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}=[3,4,-1]$，$\boldsymbol{w}=[0,5,-2]$ がつり合うような座標軸方向の力 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}$ を見いだせ．$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}$ は一意的に決まるか．

33. 図において重量 (重力) $\boldsymbol{w}$ と角 α を指定したときロープにはたらく力の大きさを求めよ．

34. ［協同プロジェクト］ **幾何学的応用**はベクトル算法に習熟するために有益である．ベクトルを使ってつぎの命題を証明せよ．

(a) 平行 4 辺形の対角線は互いに他を 2 等分する (図参照).

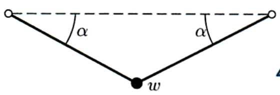
(b) 平行 4 辺形の隣接辺の中点を通る直線は 1 つの対角線を 1 : 3 の比に分ける．

(c) (a) から (b) を導け．

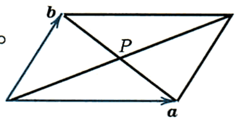
(d) 任意の 4 辺形の辺の中点を頂点とする 4 辺形は平行 4 辺形である (図参照).

(e) 正多角形の中心から頂点に向かうベクトルの和は零ベクトルである．

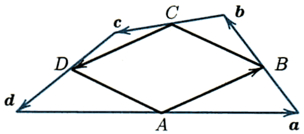
(f) 平行 6 面体の 4 つの (空間) 対角線は 1 点で交わり互いに他を 2 等分する．



問題 33



問題 34 (a)



問題 34 (d)

3.2 内積 (スカラー積)

従来はベクトルの和およびスカラー倍を扱ってきたが，今度は 2 つのベクトルの積を定義しよう．本節ではベクトルの積がスカラーとなる場合を考えるが，これもまた応用上の必要から生まれたものである．

定義　**ベクトルの内積 (スカラー積)**　2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 (スカラー積またはドット積ともいう) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ はつぎのように定義される．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\gamma \quad (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}),\\ &\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \qquad\qquad\quad\ \ (\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ \text{または}\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}).\end{aligned} \tag{1}$$

ただし，$\gamma\,(0 \leqq \gamma \leqq \pi)$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の始点を一致させたときにそれらのなす角である (図 3.15)．成分で表すと，$\boldsymbol{a} = [\,a_1, a_2, a_3\,]$，$\boldsymbol{b} = [\,b_1, b_2, b_3\,]$ に対して

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{2}$$

となる．式 (2) の導き方は後に示す．

式 (1) における余弦は正か 0 か負であるから，内積についても同じことがいえる (図 3.15)．内積が 0 となる場合はとくに重要であって，つぎの概念が提案される契機となった．

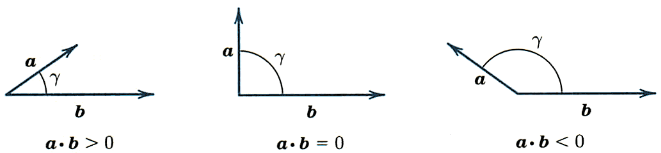


図 3.15　ベクトル間の角と内積の値

ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ のときベクトル $\boldsymbol{b}$ と**直交**するという．そのときには $\boldsymbol{b}$ もまた $\boldsymbol{a}$ と直交するから，これらのベクトルを**直交ベクトル**という．明らかに，零ベクトルはすべてのベクトルと直交する．$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対しては，$\cos\gamma = 0$ すなわち $\gamma = \pi/2\,(90°)$ のとき，またそのときに限り $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ が成立する．こうしてつぎの重要な定理が証明された．

定理 1 (直交性)　零ベクトルでない 2 つのベクトルの内積は，それらが垂直なときまたそのときに限って 0 である．

内積による大きさと角の表現

式 (1) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ とおけば $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ となるので，

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \tag{3}$$

と書ける．式 (3) と式 (1) から，零ベクトルでない 2 つのベクトルの間の角を与える公式

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}} \tag{4}$$

が得られる．

例 1　内積，ベクトルのなす角　2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = [\,1, 2, 0\,]$，$\boldsymbol{b} = [\,3, -2, 1\,]$ の内積と大きさ，およびそれらのベクトルの間の角を求めよ．

[解] $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 = -1$, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{5}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt{14}$ である．式 (4) で角を計算すると，

$$\gamma = \arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \arccos(-0.11952) = 1.69061 = 96.865^\circ$$

となる．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を図示して，これらのベクトルのなす角が 90° より大きく，内積が負になることを確認せよ． ◀

内積の一般的性質

定義により内積はつぎのような性質をもつことがわかる．任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と任意のスカラー q_1, q_2 に対して，

$$[q_1\boldsymbol{a} + q_2\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c} = q_1\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + q_2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}, \qquad \text{(線形性)} \qquad \textbf{(5a)}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, \qquad \text{(対称性)} \qquad \textbf{(5b)}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} &\geqq 0, \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 0 &\iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(正値性)} \qquad \textbf{(5c)}$$

したがって，内積は交換法則を満足し (式 (5b))，ベクトルの和に関連して分配法則を満足する．実際，式 (5a) で $q_1 = 1$, $q_2 = 1$ とおけば，

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}. \qquad \text{(分配法則)} \qquad (5a^*)$$

さらに，式 (1) と $|\cos\gamma| \leqq 1$ から

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \qquad \text{(シュワルツ}^{5)}\text{の不等式)} \qquad (6)$$

が導かれる．これと式 (3) を用いてつぎの不等式が証明される．

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|. \qquad \text{(3 角不等式)} \qquad (7)$$

簡単な内積の計算によりつぎのこともわかる．

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2). \qquad \text{(平行 4 辺形の等式)} \qquad (8)$$

表式 (6), (7), (8) は，量子力学の基礎をなすいわゆるヒルベルト空間 (抽象的内積空間) において基本的な役割を果たす (付録 1 の [9] 参照)．

式 (2) の式 (1) からの導出

3.1 節の式 (8) を使えば

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

と書くことができる．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は単位ベクトルであるから，式 (3) により

5) 1.8 節の脚注 18) を参照せよ．

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\qquad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

がなりたつ．これらのベクトルは直交する (座標軸は互いに垂直) ので，定理 1 から

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\qquad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

が得られる．ゆえに，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ による表示を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ に代入して，式 (5a*) や式 (5b) を利用すると，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は 9 つの内積の和

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+\cdots+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$

に帰着する．このうち 6 つの内積が 0 であることから式 (2) が導かれる．

内積の応用

内積の典型的な応用例がつぎの例題と問題 2.2 に示される．

例 2　力によってなされる仕事　ある物体に一定の力 $\boldsymbol{p}$ が作用し，変位 $\boldsymbol{d}$ を生じたとする．その変位の間に $\boldsymbol{p}$ のする仕事は

$$W=|\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{d}|\cos\alpha=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d} \tag{9}$$

として定義される．ここで，$|\boldsymbol{p}|$ は力の大きさ，$|\boldsymbol{d}|$ は変位の大きさ，α は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{d}$ のなす角である (図 3.16)．図のように $\alpha<90°$ ならば $W>0$ である．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{d}$ が直交すれば仕事は 0 になる (なぜか)．$\alpha>90°$ ならば $W<0$ であるが，これは物体が変位の間に力に逆らって仕事をすることを意味する．◀

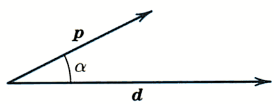


図 3.16　力による仕事

例 3　力の特定方向の成分　図 3.17 のような水平面から傾斜角 25° の斜面上に 5000 ポンドの自動車をロープでつるす．ロープにどれだけの力がはたらけば斜面上で自動車とつり合うか．

[解]　座標系を図のようにとると，車の重力 $\boldsymbol{a}$ は下 (y 座標軸の負の方向) を向くので，$\boldsymbol{a}=[0,-5000]$ と書ける．$\boldsymbol{a}$ を 2 つの直交する力 $\boldsymbol{c}$ および $\boldsymbol{p}$ の合力 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{p}$ とみな

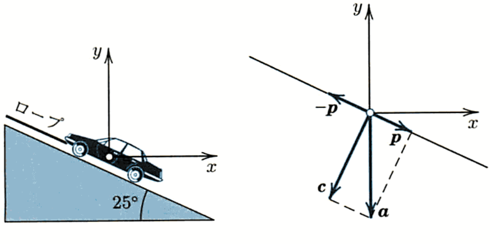


図 3.17　例 3

そう．$\boldsymbol{c}$ は自動車が斜面に及ぼす力であって，ここでは問題にしない．$\boldsymbol{p}$ はロープに平行な力であって，大きさは

$$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma = 5000\cos 65^\circ = 2113$$

であり，方向はロープと逆向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向である．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{p}$ のなす角は $\gamma = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ である．いま，ロープの方向を向くベクトル

$$\boldsymbol{b} = [-1, \tan 25^\circ] = [-1, 0.46631], \qquad |\boldsymbol{b}| = 1.10338$$

を導入すれば，

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = [0.90631, -0.42262]$$

と表すことができる．$|\boldsymbol{u}| = 1$ で $\cos\gamma > 0$ であるから，

$$|\boldsymbol{p}| = (|\boldsymbol{a}|\cos\gamma)|\boldsymbol{u}| = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{5000\cdot 0.46631}{1.10338} = 2113$$

が得られる．

［答］ 約 2100 ポンド．◀

例 3 はベクトル $\boldsymbol{a}$ のベクトル $\boldsymbol{b}(\neq \boldsymbol{0})$ の方向の**成分**あるいは**射影**という概念を使った典型的な応用である．$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向の成分 p は

$$p = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma \tag{10}$$

として定義される．ゆえに，p は $\boldsymbol{b}$ に平行な直線 l 上の $\boldsymbol{a}$ の正射影の長さであり，$p\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}$ と同じ方向か逆の方向かに応じて正か負の値をとる (図 3.18).

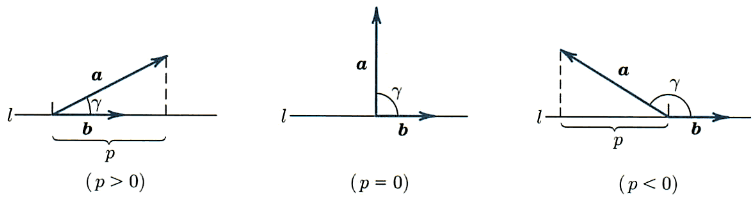


図 3.18　ベクトル $\boldsymbol{b}$ の方向におけるベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分

式 (10) に $|\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{b}| = 1$ を掛けると分子は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ に等しくなり，

$$p = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} \qquad (\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}) \tag{11}$$

が得られる．$\boldsymbol{b}$ が単位ベクトルならば，式 (11) は簡単に

$$p = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1) \tag{12}$$

と書ける．

例 4 正規直交基底 定義により，3 次元空間の正規直交基底は 3 つの単位直交ベクトルからなる基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ である．これには，与えられたベクトル $\boldsymbol{v}$ の表示

$$\boldsymbol{v} = l_1\boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{b} + l_3\boldsymbol{c}$$

における係数の決定が非常に簡単になるという利点がある．すなわち，これらの係数は $l_1 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$, $l_2 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}$, $l_3 = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v}$ として求められる．実際，この表示と $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ との内積をとって，基底が正規直交系をつくることを考慮すれば，ただちに $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = l_1\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + l_3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = l_1$ などが導かれる．

たとえば，3.1 節の表示 (8) に示されたデカルト座標系に関連する単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，**標準基底**とよばれる正規直交基底を構成している． ◀

例 5 平面上の直交直線 xy 平面上の点 $P:(1,3)$ を通り，$x - 2y + 2 = 0$ で表される直線 L_2 に垂直な直線 L_1 の表式を見いだせ (図 3.19)．

［解］ xy 平面における任意の直線 L_1 は $a_1x + a_2y = c$ と表現されるが，$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2] \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r} = [x, y]$ とおけば，式 (2) に従って $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = c$ と書きかえられる．原点を通り L_1 と平行な直線 $L_1{}^*$ は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ である．ゆえに定理 1 によりベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{r}$ に垂直，したがって $L_1{}^*$ に垂直である．L_1 と $L_1{}^*$ は平行だから，$\boldsymbol{a}$ は L_1 にも垂直である．$\boldsymbol{a}$ を L (および L^*) に対する**法線ベクトル**とよぶ．

さて，直線 $L_2 : x - 2y + 2 = 0$ に対する法線ベクトルは $\boldsymbol{b} = [1, -2]$ である．もし $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = a_1 - 2a_2 = 0$，たとえば $\boldsymbol{a} = [2, 1]$ ならば，$\boldsymbol{a}$ は L_2 の法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ と垂直で L_1 の法線ベクトルになっている．よって L_1 は $2x + y = c$ で与えられる．この直線が点 $P:(1,3)$ を通るためには，$2\cdot 1 + 3 = c = 5$ でなければならない．

［答］ L_1 は $y = -2x + 5$ で表される．なお，L_1 と L_2 の交点が $(x, y) = (1.6, 1.8)$ で与えられることを示せ． ◀

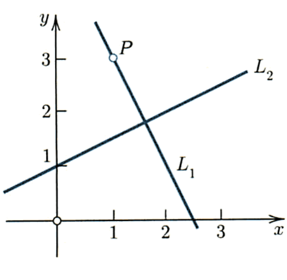


図 3.19 例 2

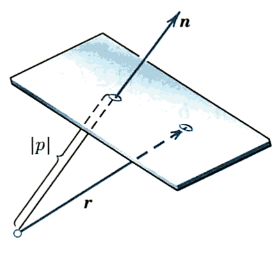


図 3.20 平面の法線ベクトル

例 6 平面に対する法線ベクトル 平面 $4x + 2y + 4z = -7$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

［解］ 空間における任意の平面は式 (2) を使って

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = a_1x + a_2y + a_3z = c \tag{13}$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3] \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r} = [x, y, z]$ である．$\boldsymbol{a}$ の方向の単位ベクトル (図 3.20) は

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

で与えられる．式 (13) を $|\boldsymbol{a}|$ で割って

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = p \qquad \left(\text{ただし } p = \frac{c}{|\boldsymbol{a}|}\right) \tag{14}$$

を得る．式 (12) によれば，p は $\boldsymbol{r}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向への射影であり，この射影は平面上の任意の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して同一の値 $c/|\boldsymbol{a}|$ をもつことがわかる．明らかに，このことは $\boldsymbol{n}$ が平面に垂直なときに，またそのときに限ってなりたつ．$\boldsymbol{n}$ は平面に対する 1 つの**単位法線ベクトル**とよばれる．もう 1 つの単位法線ベクトルは $-\boldsymbol{n}$ である．

さらに，これと射影の定義から $|p|$ は原点から平面までの距離であることが示される．表式 (14) は平面のヘッセ[6)]の**標準形**とよばれる．いまの場合，

$$\boldsymbol{a} = [4, 2, 4], \qquad c = -7, \qquad |\boldsymbol{a}| = 6, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{1}{6}\boldsymbol{a} = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

であって，平面は原点から $\frac{7}{6}$ の距離にある． ◀

❖❖❖❖❖　問題 3.2　❖❖❖❖❖

内積，仕事

$\boldsymbol{a} = [1, 3, 2]$，$\boldsymbol{b} = [2, 0, -5]$，$\boldsymbol{c} = [4, -2, 1]$ としてつぎの値を求めよ．

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
2. $|\boldsymbol{a}|, |2\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{c}|$
3. $|4\boldsymbol{a}|, 4|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$
4. $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})$, $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$
5. $2\boldsymbol{b}\cdot 5\boldsymbol{c}$, $10\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
6. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$
7. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$
8. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$
9. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

10. $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ は何を意味するか．
11. 問題 1, 4, 5, 6 はどんな法則を表しているか．
12. $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ を図 3.18 のように図示せよ．

仕事　ある物体に力 $\boldsymbol{p}$ が作用して，その物体が線分 AB に沿って点 A から点 B に移動したとする．$\boldsymbol{p}$ のした仕事を求めよ．$\boldsymbol{p}$ と AB を図示せよ．計算の詳細を示せ．

13. $\boldsymbol{p} = [2, 6, 6]$，$A : (3, 4, 0)$，$B : (5, 8, 0)$
14. $\boldsymbol{p} = [3, 2, 0]$，$A : (1, 5, 0)$，$B : (7, -4, 0)$
15. $\boldsymbol{p} = [1, 1, 1]$，$A : (2, 2, 2)$，$B : (4, 0, 2)$
16. $\boldsymbol{p} = [5, 3, 8]$，$A : (2, 9, 6)$，$B : (0, 1, 0)$

17. 仕事は 0 や負になりうるか．それはどんな場合か．
18. (合力)　2 つの力の合力が変位中にした仕事は，それぞれの力が個別にした仕事の和に等しいか．証明または反例を示せ．

---

6) Ludwig Otto Hesse (1811–1874)．ドイツの数学者．曲線と曲面の理論に貢献した．

ベクトルのなす角，ベクトルの特定方向の成分

角 $\boldsymbol{a}=[1,1,0]$，$\boldsymbol{b}=[3,2,1]$，$\boldsymbol{c}=[1,0,2]$ として，つぎのベクトルのなす角を見いだせ．

19. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ **20.** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ **21.** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ **22.** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

23. **(直線)** $x-y=1$ と $x-2y=-1$ のなす角を求めよ．

24. **(直線)** $3x+5y=0$ と $4x-2y=1$ のなす角を求めよ．

25. **(平面)** $x+y+z=1$ と $x+2y+3z=6$ のなす角を求めよ．(定義により平面のなす角はその法線のなす角である．)

26. **(平面)** $x-y=0$ と $x-z=1$ のなす角を求めよ．

27. **(3 角形)** 頂点が $A:(0,0,0)$，$B:(4,2,1)$，$C:(1,2,4)$ の 3 角形の頂角を見いだせ．

28. **(3 角形)** 頂点が $A:(1,1,0)$，$B:(5,3,0)$，$C:(2,8,0)$ の 3 角形の頂角を見いだせ．

29. **(平行 4 辺形)** 頂点が $(1,2,3)$，$(3,5,7)$，$(2,0,9)$，$(4,3,13)$ の平行 4 辺形の頂角を見いだせ．

成分 $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向の成分を求めよ．

30. $\boldsymbol{a}=[3,5,1]$，$\boldsymbol{b}=[1,0,0]$

31. $\boldsymbol{a}=[4,0,-3]$，$\boldsymbol{b}=[1,1,1]$

32. $\boldsymbol{a}=[2.0,0.5,0.3]$，$\boldsymbol{b}=[0.2,1.4,3.0]$

33. $\boldsymbol{a}=[-2,3,-1]$，$\boldsymbol{b}=[4,-2,0]$

34. $\boldsymbol{a}=[3,-4,7]$，$\boldsymbol{b}=[2,5,2]$

35. $\boldsymbol{a}=[8,2,-3]$，$\boldsymbol{b}=[0.8,0,0.6]$

36. **(3 角不等式)** 式 (7) を証明せよ．

37. **(平行 4 辺形の等式)** 式 (8) を証明せよ．

38. **[協同プロジェクト]** **直交性**はおそらく本節でもっとも重要な概念であろう．デカルト座標のような直交座標では，3.1 節の式 (9) で与えられる “**標準基底**” は 3 つの単位直交ベクトルからなるからである．

(a) $\boldsymbol{a}=[a_1,4,3]$ と $\boldsymbol{b}=[5,-2,1]$ が直交するような a_1 の値はいくらか．

(b) $[5,-2]$ と直交するすべての単位ベクトル $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2]$ を見いだせ．

(c) $\boldsymbol{a}=[2,1,0]$ と直交するすべてのベクトルを見いだせ．これらのベクトルはベクトル空間をつくるか．

(d) どんな c の値に対して直線 $x-4y=3$，$3x+cy=8$ が直交するか．これらの直線を図示せよ．

(e) どんな c の値に対して平面 $x+2y+3z=6$，$x+cy+z=0$ が直交するか．

(f) $\boldsymbol{b}=q_1[4,-3,0]$，$\boldsymbol{c}=q_2[3,4,0]$ とし，q_1,q_2 を適当なスカラーとする．3 次元空間における正規直交基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ を定めよ．

(g) 長方形の対角線が直交するときにはどんな結論が導かれるか．その結論をベクトルを使って証明できるか．

(h) 直交性の概念が重要な意味をもつほかの力学的ないし幾何学的応用について論ぜよ．

3.3 外積 (ベクトル積)

3.2 節で導入した内積はスカラーであった．しかし，回転などに関連したある種の応用では，積がふたたびベクトルとなるようなベクトル乗法が必要になる．

定義 **外積 (ベクトル積)** 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]$，$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3]$ の**外積 (ベクトル積，クロス積)** はベクトルであって，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

と書く．ベクトル $\boldsymbol{v}$ はつぎのように定義される．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が同一方向か反対方向をもつとき，あるいはどちらか 1 つが零ベクトルであるとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である．そうでない場合には，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさは

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\gamma \qquad (1)$$

である．図 3.21 に示すように，これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を隣接辺とする平行 4 辺形の面積に等しい．(γ は前節と同様に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角である．) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の方向は $\boldsymbol{a}$ にも $\boldsymbol{b}$ にも垂直であって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}$ の順序で図 3.21 に示された右手系の 3 つ組 (後に説明する) を形成するような方向である． ◀

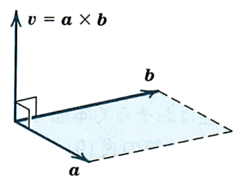


図 3.21 ベクトルの外積

外積 $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3] = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のデカルト座標に関する**成分**は，

$$v_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad v_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad v_3 = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (2)$$

で与えられる．ただし，デカルト座標系は右手系をとるものと仮定した．左手系の場合には，各成分に -1 を掛けなければならない．公式 (2) の証明は付録 4 にある．

[説明] まず，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}$ の**右手系の 3 つ組**とは，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}$ のこの順序での配置が，右手を図 3.22 の状態に保ったときの親指，人差し指，中指の配置と同じであるものをいう．$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ の方向まで角 α ($< \pi$) だけ回転したとき，$\boldsymbol{v}$ は同じように回転した右ねじが進む方向に向かうといってもよい (図 3.23).

つぎに，あるデカルト座標系に関する正の座標軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (3.1 節) が図 3.24(a) のような右手系の 3 つ組をなすときには，その座標系は**右手系**とよばれる．

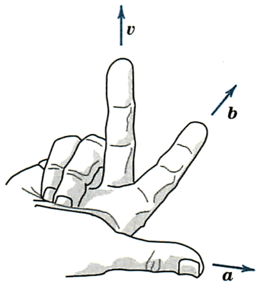


図 3.22　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}$ の右手系の 3 つ組

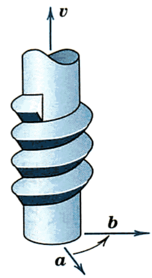


図 3.23　右ねじ

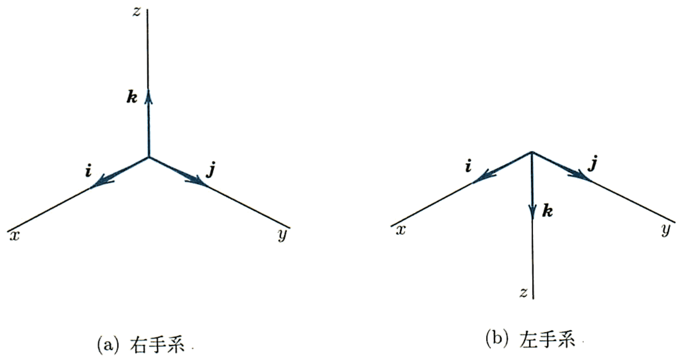


図 3.24　デカルト座標系の 2 つの型

図 3.24(b) のように $\boldsymbol{k}$ の向きが逆転した座標系は**左手系**である．応用ではおもに右手系が用いられている．◀

例 1　外積　2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の右手系座標に関する成分表示が $\boldsymbol{a} = [1, 1, 0]$，$\boldsymbol{b} = [3, 0, 0]$ ならば，外積 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の成分は公式 (2) から

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3$$

となる．この簡単な場合の結果を吟味するために $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}$ を図示せよ．xy 平面上の 2 つのベクトルの外積が z 軸に平行になる (または零ベクトルに等しい) ことを示せるか．◀

公式 (2) の記憶法　2 次と 3 次の行列式にくわしい読者にとっては，行列式を使って公式 (2) を書きかえることは容易であろう．その結果は

$$v_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad v_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad v_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (2^*)$$

である．したがって，$\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3] = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ は象徴的には 3 次の

行列式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{2**}$$

の第 1 行による展開と解釈される．(第 1 行は数ではなくベクトルを含む点がふつうの行列式とは違うので "象徴的" と形容した.) 左手系座標に対しては，行列式 (2*), (2**) ともに符号をかえなければならない．

例 2 行列式 (2) の適用** 右手系のデカルト座標系に関して $\boldsymbol{a}=[4,0,-1]$, $\boldsymbol{b}=[-2,1,3]$ とすると，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=[1,-10,4].$$ ◀

例 3 標準基底ベクトルの外積 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は単位直交ベクトルであるから，それらの外積もまた単位直交ベクトルになる．実際，右手系座標に関しては

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, &&\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}, &&\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ &\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}, &&\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}, &&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{3}$$

である．左手系座標では $\boldsymbol{k}$ を $-\boldsymbol{k}$ におきかえなければならないので，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{j}$ などが得られる． ◀

外積の一般的性質

外積には，任意のスカラー l に対して

$$(l\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=l(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(l\boldsymbol{b}) \tag{4}$$

という性質がある．さらに，外積はベクトルの和に関連して分配法則を満足する．すなわち，

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}), \tag{5a}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}). \tag{5b}$$

外積は可換ではなく**反可換**である．すなわち，

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \qquad (\text{図 }3.25). \tag{6}$$

外積に対しては結合法則も成立しない．すなわち，一般には

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \tag{7}$$

となるので，括弧をはずすことができない．

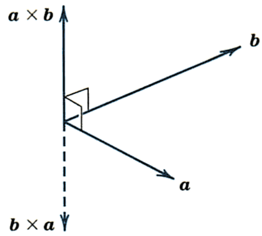


図 3.25　外積の反可換性

[証明]　式 (4) は定義からすぐわかる．式 (5a) の左辺 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ の第 1 成分は行列式 (2*) により

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)+(a_2c_3-a_3c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる．右辺の 2 つの行列式の和は $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$ の第 1 成分にほかならない．式 (5a), (5b) のほかの成分についても同様に証明される．

反可換性 (6) は，行列式 (2**) が第 2 行と第 3 行の交換により -1 倍されることからただちに導かれる．これは幾何学的にもつぎのようにして確認される．いま $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{w}$ とおくと，式 (1) により $|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{w}|$ である．そして $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{w}$ が右手系の 3 つ組を構成するためには，$\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{v}$ でなければならない．

最後に，$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$ なのに，$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$ となる (例 3)．これで式 (7) が証明される．◀

外積の典型的な応用

例 4　**力のモーメント**　力学においては，点 Q のまわりの力 $\boldsymbol{p}$ のモーメント m は積 $m=|\boldsymbol{p}|d$ として定義される (図 3.26)．ここで d は Q と $\boldsymbol{p}$ の作用線 L との (垂直) 距離である．$\boldsymbol{r}$ を Q から L 上の任意の点 A へのベクトルとすれば，$d=|\boldsymbol{r}|\sin\gamma$ (図 3.26) および

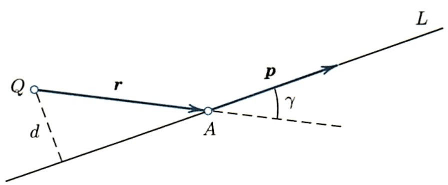


図 3.26　力のモーメント

$$m = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{p}|\sin\gamma$$

がなりたつ．γ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ の間の角なので，

$$m = |\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|$$

となることは式 (1) からすぐわかる．ベクトル

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{8}$$

は $\boldsymbol{p}$ の点 Q のまわりのモーメントベクトルまたはベクトルモーメントとよばれる．その大きさは m である．$\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}$ のときのその方向は $\boldsymbol{p}$ が Q のまわりに生じる回転の軸の方向である．この回転軸は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ の両方に垂直である．◀

例 5　力のモーメント　図 3.27 に示された車輪の中心のまわりの力 $\boldsymbol{p}$ のモーメントを求めよ．

［解］ 図 3.27 に示した座標系に対して

$$\boldsymbol{p} = [1000\cos 30°,\ 1000\sin 30°,\ 0] = [866, 500, 0], \qquad \boldsymbol{r} = [0, -1.5, 0]$$

とする．(車輪の中心は y 軸上の点 $y=-1.5$ にあることに注意せよ．)　式 (8) と行列式 (2**) により

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 866 & 500 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1.5 \\ 866 & 500 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= [0, 0, -1299]$$

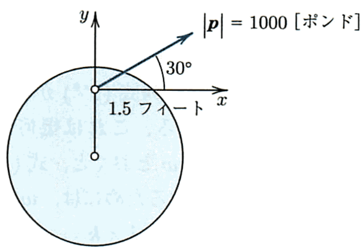


図 3.27　力 $\boldsymbol{p}$ のモーメント

となる．このモーメントベクトルの方向は車輪面に垂直で，力 $\boldsymbol{p}$ によって生じる車輪の回転の軸方向と一致する．$\boldsymbol{m}$ は z 座標軸の負の方向に向くが，これは回転によって右ねじが進む方向である．◀

例 6　回転体の速度　空間における剛体 B の回転は，**角速度ベクトル** $\boldsymbol{w}$ によって簡単にしかも一意的に記述することができる．$\boldsymbol{w}$ の方向は回転軸の方向であって，その始点から終点に向かって見た場合に時計まわりに回転するようにとる．また，$\boldsymbol{w}$ の大きさは回転の**角速度** $\omega\ (>0)$，すなわち B の 1 点の "線速度"(接線速度) を回転軸からその点までの距離で割ったものに等しい．

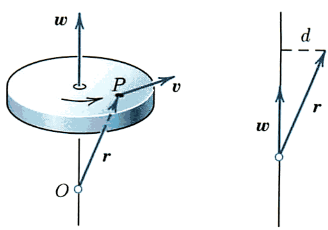


図 3.28　剛体の回転

P を B の任意の点とし，d を P の軸からの距離とすれば，P の速さは ωd である．$\boldsymbol{r}$ を回転軸上の原点 O に関する

P の位置ベクトルとしよう．$\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を γ とすると，$d = |\boldsymbol{r}|\sin\gamma$ であるから，

$$\omega d = |\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{r}|\sin\gamma = |\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}|.$$

これと外積の定義から，P の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r} \tag{9}$$

で表されることがわかる (図 3.28)．この簡単な公式は B の任意の点の $\boldsymbol{v}$ を定めるために役だつ．◀

スカラー 3 重積

3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = [\,a_1, a_2, a_3\,], \qquad \boldsymbol{b} = [\,b_1, b_2, b_3\,], \qquad \boldsymbol{c} = [\,c_1, c_2, c_3\,]$$

の**スカラー 3 重積**あるいは**混合 3 重積**は

$$(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

として定義される．これは 3 次の行列式である．$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v} = [\,v_1, v_2, v_3\,]$ とおき，内積の成分表示 (3.2 節の公式 (2)) と行列式 (2*) を用いると，まず

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3\\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\left(-\begin{vmatrix} b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}\right) + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

を得る．右辺は 3 次の行列式の第 1 行による展開になっているから，

$$(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{10}$$

また，行列式のある行を k 倍すれば行列式の値も k 倍されるので，任意の k に対して

$$(k\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}) = k(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}) \tag{11}$$

もなりたつ．つぎに，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{12}$$

を証明しよう．式 (12) の右辺は内積の可換性により

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

と書ける．この行列式の第 1 行と第 2 行を交換し，さらにその結果現れる新しい行列式の第 2 行と第 3 行を交換すれば，結局，最初の行列式 (10) に帰着することがわかる．1 回の行交換によって行列式の値は -1 倍されるが，2 回行交換を繰り返せば $(-1)(-1)=1$ 倍となってもとに戻る．これで式 (12) が証明される．

スカラー 3 重積の幾何学的解釈

スカラー 3 重積 (10) の絶対値は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を辺ベクトルとする平行 6 面体 (図 3.29) の体積に等しい．実際，3.2 節の式 (1) から

$$|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos\beta \qquad (\text{図 } 3.29)$$

が得られる．ここで $|\boldsymbol{a}|\,|\cos\beta|$ は平行 6 面体の高さ h であり，$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ は式 (1) により $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を辺とする平行 4 辺形の面積すなわち平行 6 面体の底面積を与える．

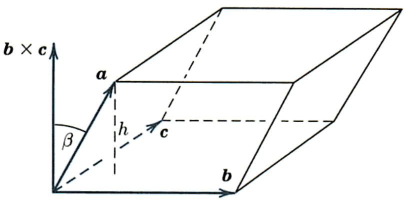


図 3.29　スカラー 3 重積の幾何学的解釈

例 7　**4 面体**　3 つの辺ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ によって 1 つの 4 面体が定まる (図 3.30)．右手系のデカルト座標に関して $\boldsymbol{a}=[2,0,3]$，$\boldsymbol{b}=[0,6,2]$，$\boldsymbol{c}=[3,3,0]$ のとき，4 面体の体積を求めよ．

［解］ これらのベクトルを辺ベクトルとする平行 6 面体の体積 V はスカラー 3 重積

$$(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -12 - 54 = -66$$

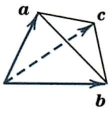


図 3.30　4 面体

の絶対値に等しく，$V=66$ となる．負号はベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ がこの順序で左手系の 3 つ組をつくることを示している．4 面体の体積は平行 6 面体の体積の $\frac{1}{6}$ すなわち 11 である．

3 つのベクトルの共通の始点を原点に選んで，この 4 面体の見取り図を描いてみよ．4 頂点の座標はいくらになるか．◀

スカラー 3 重積による 1 次独立の判定　与えられたベクトル $\boldsymbol{a}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(m)}$ の組は，ベクトル方程式

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0}$$

を満足するスカラー $c_1, \cdots, c_m$ の組が $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \cdots,\ c_m = 0$ に限られるとき，**1 次独立**であるという．これに反して，同じベクトル方程式がすべては 0 でないスカラーの組に対してもなりたつとき，そのベクトルの組は **1 次従属**であるという．

3 次元空間のベクトルの場合には，始点をそろえた 3 つのベクトルは，それらが同一平面上にないとき，またそのときに限り 1 次独立な組を構成する．スカラー 3 重積が幾何学的には体積と解釈されることから，1 次独立の新しい判定基準が得られる．

定理 1 (**スカラー 3 重積による 1 次独立の判定基準**)　3 つのベクトルはそれらのスカラー 3 重積が 0 でないときに，またそのときに限って 1 次独立である．

スカラー 3 重積はもっとも重要なベクトルの "繰り返しの積" である．応用上必要となるほかの繰り返しの積は問題でとりあげられている．

これで (3 次元空間や平面の) ベクトル代数の説明は終わる．次節からベクトル解析 (ベクトルの微分法) の説明がはじまる．

問題 3.3

外積，スカラー 3 重積

問題 1–18 においては，右手系のデカルト座標表示で $\boldsymbol{a} = [1, 2, 0]$，$\boldsymbol{b} = [-3, 2, 0]$，$\boldsymbol{c} = [2, 3, 4]$，$\boldsymbol{d} = [6, -7, 2]$ とする．つぎの表式を計算せよ．(計算の詳細を示せ．)

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

2. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$

3. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\ |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|,\ |\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

4. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}$

5. $3\boldsymbol{a}\times 5\boldsymbol{b},\ 5\boldsymbol{a}\times 3\boldsymbol{b},\ 15\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

6. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b},\ (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

7. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

8. $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{a}$

9. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

10. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$

11. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

12. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})$

13. $(\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{k}\ \ \boldsymbol{j})$

14. $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d},\ \ \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$

15. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}),\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})$

16. $(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}),\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c})$

17. $(\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{d}),\ (\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{d})$

18. $(3\boldsymbol{a}\ \ 2\boldsymbol{c}\ \ 4\boldsymbol{d}),\ 24(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d})$

19. 問題 1, 5, 7, 9, 12 は外積のどんな性質を表すか．

外積とスカラー 3 重積の応用

20. (回転) 車輪が x 軸のまわりに角速度 $3\,\mathrm{s}^{-1}$ で回転している．原点から正の x 方向を見たとき時計まわりになるような回転である．点 $(2,2,2)$ における速度と速さを求めよ．

21. (回転) 問題 20 の車輪が y 軸のまわりに $\omega = 9\,[\mathrm{s}^{-1}]$ で回転するとき，点 $(3,4,8)$ における速度と速さはいくらか．

力のモーメント 点 A を通る作用線上の力 $\boldsymbol{p}$ の点 Q のまわりのモーメントベクトル $\boldsymbol{m}$ を見いだせ．

22. $\boldsymbol{p} = [2,1,0]$, $A:(1,3,0)$, $Q:(4,-1,0)$

23. $\boldsymbol{p} = [0,0,10]$, $A:(0,0,0)$, $Q:(2,2,0)$

24. $\boldsymbol{p} = [3,-1,2]$, $A:(0,-1,4)$, $Q:(3,0,2)$

25. $\boldsymbol{p} = [3,0,-6]$, $A:(0,-1,4)$, $Q:(4,6,-1)$

26. (平行 4 辺形の面積) 頂点が (1,1), (4,−2), (9,3), (12,0) の平行 4 辺形の面積を求めよ．

27. (平行 4 辺形の面積) 頂点が (1,1,1), (4,4,4), (8,−3,14), (11,0,17) の平行 4 辺形の面積を求めよ．

28. (3 角形の面積) 頂点が (2,1), (4,−1), (6,3) の 3 角形を図示し，面積を求めよ．

29. (空間における 3 角形) 頂点が (1,3,2), (3,−4,2), (5,0,−5) の 3 角形の面積を求めよ．

30. (平面) 点 $(1,3,0)$, $(2,0,8)$, $(0,2,2)$ を含む平面の法線ベクトルを求め，これを利用して平面の方程式を定めよ．

31. (平面) 点 $(1,2,\frac{1}{4})$, $(4,2,-2)$, $(0,8,4)$ を含む平面を定めよ．

32. (平行 6 面体) 辺ベクトルが $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$, $-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$ の平行 6 面体の体積を求めよ．

33. (平行 6 面体) 辺ベクトルが $[4,9,-1]$, $[2,6,0]$, $[5,-4,2]$ の平行 6 面体の体積を求めよ．

34. (4 面体) 頂点が $(1,3,6)$, $(3,7,12)$, $(8,8,9)$, $(2,2,8)$ の 4 面体の体積を求めよ．

35. (4 面体) 頂点が $(1,1,1)$, $(5,-7,3)$, $(7,4,8)$, $(10,7,4)$ の 4 面体の体積を求めよ．

36. (1 次独立) ベクトル $[4,2,9]$, $[3,2,1]$, $[-4,6,9]$ は 1 次独立か．

37. (1 次独立) ベクトル $[3,5,9]$, $[73,-56,76]$, $[-4,7,-1]$ は 1 次独立か．

38. [協同プロジェクト] **繰り返しの積に対する有用な公式** つぎの諸公式は実際問題においてしばしば有用である．それぞれの場合の証明と自分で選んだいくつかの実例による説明を与えよ．

(a)
$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}.$$
この公式は幾何学的にはどう説明できるか．直交ベクトルに対してはどんな結果が得られるか．

(b)
$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}.$$

[ヒント] $\boldsymbol{d} = [d_1,0,0]$, $\boldsymbol{c} = [c_1,c_2,0]$ となるように右手系のデカルト座標を選ぶ．そのとき公式の各辺がいずれも $[-b_2c_2d_1, b_1c_2d_1, 0]$ に等しいことを確かめよ．それからどんなデカルト座標系に対しても両辺が等しくなる理由を考えよ．

(c)　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$　((b) を使え).

(d)　**ラグランジュ**[7]**の恒等式**

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\qquad \text{((b) を使え).}$$

(e)
$$(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{b}),$$
$$(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}).$$

3.4　ベクトル場とスカラー場，導関数

ベクトル解析ではベクトル関数とスカラー関数という 2 種類の関数を扱う．**ベクトル関数**の値は空間の点 P に依存するベクトル

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(P)=[\,v_1(P),\ v_2(P),\ v_3(P)\,]$$

であり，**スカラー関数**の値は P に依存するスカラー

$$f=f(P)$$

である．応用では，この種の関数の定義域は空間における 3 次元領域，曲面または曲線である．ベクトル関数はその領域 (曲面，曲線) において**ベクトル場**を定義するともいう．実例は図 3.31 から図 3.34 に示されている．同様に，スカラー関数も空間領域，曲面，曲線における**スカラー場**を定義する．実例としては，物体中の温度の場や大気中の圧力の場などがある．ベクトル関数やスカラー関数は時間 t などのパラメータに依存することもある．

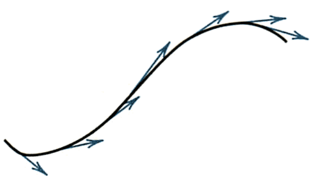


図 3.31　曲線の接線ベクトルの場

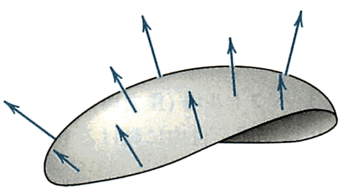


図 3.32　曲面の法線ベクトルの場

[注意]　デカルト座標 x, y, z を導入すれば，$\boldsymbol{v}(P)$ のかわりに

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=[\,v_1(x,y,z),\ v_2(x,y,z),\ v_3(x,y,z)\,]$$

と書くこともできる．スカラー関数 $f(x,y,z)$ についても同様である．しかし，物理的 (幾何的) に意味のあるベクトル関数やスカラー関数は，それが定義される点のみによって定まり，デカルト座標の選び方によらないことを忘れてはならない．

7) Joseph Louis Lagrange (1736–1813)，偉大な数学者．フランス人の血すじでトリノに生まれ，19 歳のときはじめて教授となった (トリノ士官学校)．1766 年ベルリン・アカデミー数学部門の主任となり，1787 年パリに移った．彼の重要な業績は，変分法，天体力学，一般力学 (「解析力学」，1788 年パリで出版)，微分方程式論，近似論，代数学，整数論の分野である．

例 1　スカラー関数 (空間におけるユークリッド距離)　空間の固定された点 P_0 から任意の点 P までの距離 $f(P)$ は，定義域 D が全空間であるスカラー関数である．$f(P)$ は空間においてスカラー場を定義する．デカルト座標系を導入し P_0 の座標を x_0, y_0, z_0 とすれば，f はよく知られた公式

$$\begin{aligned} f(P) &= f(x, y, z) \\ &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \end{aligned}$$

によって与えられる．ここで x, y, z は P の座標である．与えられたデカルト座標系をほかの座標系におきかえれば，P や P_0 の座標の値は一般に変わるけれども，$f(P)$ は前と同じ値をもつ．したがって $f(P)$ はスカラー関数である．P と P_0 を通る直線の方向余弦は，それらの値が座標系の選び方に依存するのでスカラーではない．◀

例 2　ベクトル場 (速度場)　回転体 B の速度ベクトル $\boldsymbol{v}(P)$ は任意の瞬間においてベクトル場を構成する．いわゆる回転の速度場である．回転軸上に原点をもつデカルト座標系を導入すると (3.3 節の例 6)，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(x, y, z) &= \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{w} \times [\,x, y, z\,] \\ &= \boldsymbol{w} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}). \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，x, y, z は考えている瞬間における B の任意の点の座標である．z 軸が回転軸で $\boldsymbol{w}$ が正の z 方向を向くように座標系を選べば，$\boldsymbol{w} = \omega\boldsymbol{k}$ かつ

$$\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega[\,-y, x, 0\,] = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$$

となる．回転体とその速度場の例を図 3.33 に示す．◀

例 3　ベクトル場 (重力場)　質量 M の粒子 A を点 P_0 に固定し，質量 m の粒子 B (点 P) は空間を自由に動けるものとする．このとき粒子 A は粒子 B を引きつける．

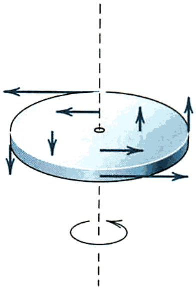


図 3.33　回転体の速度場

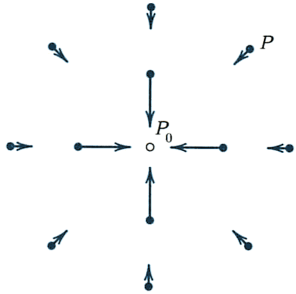


図 3.34　例 3 の重力場

ニュートン[8]**の万有引力 (重力) の法則**によれば，その引力 $\boldsymbol{p}$ は P から P_0 に向かう方向にはたらき，その大きさは P と P_0 の間の距離 r の 2 乗に反比例する．すなわち，

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{c}{r^2} \qquad (c = GMm). \tag{2}$$

ただし $G(= 6.67 \times 10^{-18}\mathrm{cm}^3/\mathrm{g{\cdot}s})$ は万有引力定数である．ゆえに $\boldsymbol{p}$ は空間にベクトル場を定義する．デカルト座標を使って P_0 の座標を x_0, y_0, z_0，P の座標を x, y, z とすると，

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (\geqq 0)$$

である．$r > 0$ と仮定しベクトル

$$\boldsymbol{r} = [\,x-x_0, y-y_0, z-z_0\,] = (x-x_0)\boldsymbol{i} + (y-y_0)\boldsymbol{j} + (z-z_0)\boldsymbol{k}$$

を導入すれば，$|\boldsymbol{r}| = r$ で $(-1/r)\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{p}$ の方向の単位ベクトルである．ここで負号は $\boldsymbol{p}$ が P から P_0 の方向に向いていることを意味する (図 3.34)．これと式 (2) から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|\left(-\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\right) &= -\frac{c}{r^3}\boldsymbol{r} \\ &= -c\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i} - c\frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j} - c\frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{3}$$

このベクトル関数は粒子 B に作用する万有引力を表している．◀

ベクトルの微分法

微分法における基本概念，たとえば収束，連続，微分可能性などの諸概念は，ベクトル解析においても簡単にしかも自然に導入される．もっとも重要な概念は導関数である．

収　束　　ベクトルの無限列 $\boldsymbol{a}_{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は，

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{a}_{(n)} - \boldsymbol{a}| = 0 \tag{4}$$

を満たすあるベクトル $\boldsymbol{a}$ が存在するとき，$\boldsymbol{a}$ に**収束**するといわれる．$\boldsymbol{a}$ をそのベクトル列の**極限ベクトル**とよびつぎのように書く．

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_{(n)} = \boldsymbol{a}. \tag{5}$$

デカルト座標を与えれば，ベクトル列が $\boldsymbol{a}$ に収束するのは，明らかにベクトル成分からなる 3 つの数列がそれぞれ対応する $\boldsymbol{a}$ の成分に収束するときであり，またそのときに限られる．この証明は簡単だから読者に任せよう．

---

8) Sir Issac Newton (1642–1727)，イギリスの偉大な物理学者，数学者．1669 年にケンブリッジ大学の教授となり，また 1699 年に造幣局長となった．彼とドイツの数学者，哲学者である Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) は (独立に) 微積分法を考案した．Newton は微積分法によって多くの基本的物理法則を発見し，また物理学の問題を研究する方法を創案した．彼の "*Philosophia naturalis principia mathematica*"(「自然哲学の数学的原理」，1687 年) で古典力学が展開されている．彼の業績は数学と物理学の両方において大変重要である．

同様に，実変数 t のベクトル関数 $\boldsymbol{v}(t)$ が t_0 の近傍[9](t_0 は除いてもよい) で定義され，

$$\lim_{t\to t_0} |\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{l}| = 0 \tag{6}$$

ならば，t が t_0 に近づいたときの $\boldsymbol{v}(t)$ の極限は $\boldsymbol{l}$ であるといい，

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{l} \tag{7}$$

と書く．

連　続　ベクトル関数 $\boldsymbol{v}(t)$ が $t = t_0$ で連続であるとは，$\boldsymbol{v}(t)$ が t_0 の近傍で定義され，

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) \tag{8}$$

となることである．

デカルト座標系を導入すれば，$\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\boldsymbol{v}(t) = [\,v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)\,] = v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}$$

のように表される．3 つの成分が t_0 において連続なとき，またそのときに限り $\boldsymbol{v}(t)$ は t_0 において連続である．

つぎにもっとも重要な定義を述べよう．

定義　ベクトル関数の導関数　ベクトル関数 $\boldsymbol{v}(t)$ は，極限値

$$\boldsymbol{v}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \tag{9}$$

が存在するとき，点 t において**微分可能**であるという．ベクトル $\boldsymbol{v}'(t)$ は $\boldsymbol{v}(t)$ の**導関数**とよばれる．図 3.35 を参照せよ．(この図上の曲線は，独立変数の値を t と $t+\Delta t$ を含むある区間で変えていったときに，$\boldsymbol{v}$ を表す矢印の先端が描く軌跡である．)

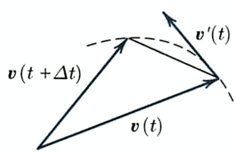


図 3.35　ベクトル関数の導関数

9)　すなわち，t_0 を内点 (端点ではない) として含む t 軸上のある区間 (線分)．数学では (日常用語とは異なり)，点 (ここでは t_0) はつねに近傍の 1 点とみなされる．この見方が実際的なのである．

デカルト座標系に関する成分表示を用いたときには，$\boldsymbol{v}(t)$ が点 t で微分可能であるための必要十分条件は，その 3 成分が t で微分可能なことである．そして，導関数 $\boldsymbol{v}'(t)$ は各成分を微分することによって得られる．すなわち，

$$\boldsymbol{v}'(t) = [\, v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t) \,] \tag{10}$$

である．

よく知られた微分の法則に相当する法則がベクトル関数に対しても適用される．たとえば，

$$(c\boldsymbol{v})' = c\boldsymbol{v}' \qquad (c \text{ は定数}),$$

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}'$$

などがなりたつ．とくに，公式

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}', \tag{11}$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}', \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{w})' = (\boldsymbol{u}'\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}'\quad \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{w}') \tag{13}$$

は重要である．証明は簡単なので読者に任せる．外積は可換ではないから，式 (12) におけるベクトルの順序に注意を払わなければならない．

例 4　**大きさ一定のベクトル関数の導関数**　$\boldsymbol{v}(t)$ を大きさ一定のベクトル関数とし，$|\boldsymbol{v}(t)| = c$ とおけば，$|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = c^2$ であり，微分により $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})' = 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = 0$ となる (式 (11))．ゆえにつぎの結果が得られる．大きさが一定のベクトル関数 $\boldsymbol{v}(t)$ の導関数は，零ベクトルか $\boldsymbol{v}(t)$ に直交するかのいずれかである．◀

ベクトル関数の偏導関数

今までの考察から 2, 3 次元のベクトル関数に偏微分を導入できることがわかる．ベクトル関数

$$\boldsymbol{v} = [\, v_1,\ v_2,\ v_3 \,] = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$$

の成分が n 個の変数 $t_1, \cdots, t_n$ の微分可能な関数であるとき，t_l に関する $\boldsymbol{v}$ の**偏導関数**は $\partial\boldsymbol{v}/\partial t_l$ で表され，ベクトル関数

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t_l} = \frac{\partial v_1}{\partial t_l}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t_l}\boldsymbol{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t_l}\boldsymbol{k}$$

として定義される．同様に，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l \partial t_m}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l \partial t_m}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l \partial t_m}\boldsymbol{k}$$

などである．

例 5　偏導関数　$\boldsymbol{r}(t_1, t_2) = a\cos t_1\,\boldsymbol{i} + a\sin t_1\,\boldsymbol{j} + t_2\,\boldsymbol{k}$ とすると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_1} = -a\sin t_1\,\boldsymbol{i} + a\cos t_1\,\boldsymbol{j}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_2} = \boldsymbol{k}$$

である． ◀

ベクトル関数の導関数のいろいろな物理的，幾何的応用は次節と 4 章で論じられる．

❖❖❖❖❖ 問題 3.4 ❖❖❖❖❖

スカラー場

平面におけるスカラー場　$f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ で与えられるスカラー場 (圧力場) を考え，つぎの諸量を求めよ．

1. 点 $(2, 4)$, $(0.5, -3.25)$, $(\sqrt{17}, 1/\sqrt{6})$ における圧力．

2. 等圧線 (圧力一定の曲線)　そのいくつかを図示せよ．

3. 圧力が 36 から 144 まで変化する領域．

等位線　つぎの関数で与えられる温度場の等温線 (温度一定の曲線) を定め，そのいくつかを図示せよ．

4. $T = \ln(x^2 + y^2)$　**5.** $T = \arctan(y/x)$　**6.** $T = x^2 - y^2$

7. $T = xy$　**8.** $T = x/(x^2 + y^2)$　**9.** $T = y/(x^2 + y^2)$

10.［CAS プロジェクト］**平面におけるスカラー場**　つぎの場の等温線を図示し，どんな形になるか説明せよ．

(a) $x^3 - 3xy^2$　(b) $3x^2y - y^3$　(c) $\cos x \cosh y$

(d) $\sin x \cosh y$　(e) $\ln[(x - 1)^2 + y^2]$　(f) $\cos^2 x + \sinh^2 y$

空間におけるスカラー場　つぎのスカラー場の等位面はどんな形の曲面になるか．

11. $f = 4x + 3y - z$　**12.** $f = x^2 + 3y^2$　**13.** $f = 4x^2 + y^2 + 9z^2$

14. $f = x^2 + y^2 - z$　**15.** $f = z - \sqrt{x^2 + y^2}$　**16.** $f = y^2 - z$

ベクトル場

つぎのベクトル関数によって与えられるベクトル場について，図 3.34 と同様な図を描け．

17. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$　**18.** $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$　**19.** $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$

20. $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$　**21.** $\boldsymbol{v} = -(x^2 + y^2)\boldsymbol{i}$　**22.** $\boldsymbol{v} = (1/x)\boldsymbol{i} + (1/y)\boldsymbol{j}$

23.［CAS プロジェクト］**ベクトル場**　つぎのベクトル場を矢印で描け．

(a) $\boldsymbol{v} = [x,\ x^3]$　(b) $\boldsymbol{v} = [1/y,\ 1/x]$

(c) $\boldsymbol{v} = (x^2 + y^2)^{-1}[x, -y]$　(d) $\boldsymbol{v} = e^{x^2+y^2}[x, -y]$

(e) $\boldsymbol{v} = [\cos x,\ \sin x]$

24.［論文プロジェクト］**ベクトル関数の微分**　自分で選んだ実例と式 (11)–(13) の証明を含めて，ベクトル関数の微分の本質的な考え方を説明する小論文を書け．

ベクトル関数の微分　1 階偏導関数を求めよ．

25. $[y^2,\ z^2,\ x^2]$

26. $\cos xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

27. $[xy,\ yz,\ zx]$

28. $[e^x \cos y,\ e^x \sin y,\ 0]$

29. $[\cos x \cosh y,\ -\sin x \sinh y]$

30. $\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\ \arctan\dfrac{y}{x},\ 0\right]$

3.5　曲線，接線，弧の長さ

空間曲線は微積分だけでなく力学などでも (たとえば物体の運動の経路として) 重要である．本節では曲線がベクトル解析の応用の主要部分を構成していることを示そう．空間における曲線や曲面 (4.5 節) の理論は**微分幾何学**とよばれ，工業デザイン，測地学，地理学，宇宙旅行，相対論などで重要な役割を果たしている (付録 1 の [10] 参照)．

空間における曲線 C はベクトル関数

$$\boldsymbol{r}(t) = [\,x(t),\ y(t),\ z(t)\,] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

で表される (図 3.36)．ここで x, y, z はデカルト座標 (通常の直交座標，3.1 節) である．式 (1) は曲線の**パラメータ表示** (**助変数表示**) とよばれ，t はこの表示の**パラメータ** (**助変数**) とよばれる．t のそれぞれの値 t_0 に対して，位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t_0)$ すなわち座標 $x(t_0), y(t_0), z(t_0)$ をもつ C 上の 1 点が対応する．パラメータ t は力学ではふつう時間であるが，もちろんほかの量でもよい．

式 (1) においては座標 x, y, z はいずれも従属変数である．この特性はパラメータ表示の実用上重要な利点であることが後に示される．また，式 (1) は曲線 C の**向き**，すなわち t が増加したときに C に沿って進む方向を与える．これを式 (1) によって与えられる C の**正の向き**という．t が減少する方向は**負の向き**である．明らかに，式 (1) の選び方によって 2 通りの曲線の向きづけがで

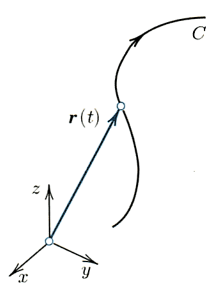


図 3.36　曲線のパラメータ表示

きる．

多くの空間曲線 C に適したほかの 2 種類の表示は

$$y = f(x), \qquad z = g(x) \tag{2}$$

(あるいは y や z を独立変数とする 1 対の方程式) および

$$F(x,y,z) = 0, \qquad G(x,y,z) = 0 \tag{3}$$

である．幾何学的には，$y = f(x)$ は C の xy 平面上への射影であり，$z = g(x)$ は xz 平面上への射影である．式 (3) は C を 2 つの曲面 $F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$ の交わりとして与える．

典型的実例，各種の曲線

例 1　直線　位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ の点 A を通る定ベクトル $\boldsymbol{b}$ の方向の直線 L (図 3.37) は

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = [a_1 + tb_1,\ a_2 + tb_2,\ a_3 + tb_3] \tag{4}$$

で表される．$\boldsymbol{b}$ が単位ベクトルならばその成分は L の**方向余弦**である．そしてこの場合，$|t|$ は A から L 上の点までの距離を表す．たとえば，xy 平面上で点 $A:(3,2)$ を通る勾配 1 の直線は

$$\boldsymbol{r}(t) = [3,2,0] + t[1,1,0] = [3+t, 2+t, 0]$$

で与えられる (図示せよ)．◀

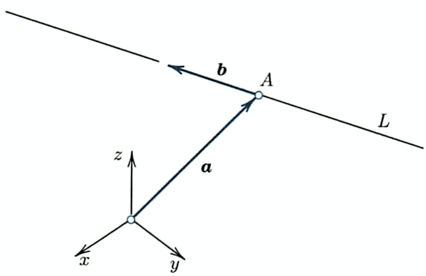


図 3.37　直線のパラメータ表示

例 2　楕円，円　ベクトル関数

$$\boldsymbol{r}(t) = [a\cos t,\ b\sin t,\ 0] = a\cos t\,\boldsymbol{i} + b\sin t\,\boldsymbol{j} \tag{5}$$

は，xy 平面において中心が原点で主軸が x 軸，y 軸の方向を向く楕円である．実際，$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ であるから，式 (5) より

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0$$

が得られる．$b = a$ のときには式 (5) は半径 a の円を表す．◀

平面曲線とは空間内の 1 平面上にある曲線のことである．平面曲線でない曲線は**ねじれ曲線**とよばれる．標準的な例をつぎに示す．

例 3　**円らせん**　ベクトル関数

$$\boldsymbol{r}(t) = [\,a\cos t,\ a\sin t,\ ct\,] = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + ct\,\boldsymbol{k} \qquad (c \neq 0) \qquad (6)$$

で表されるねじれ曲線 C を**円らせん**という．それは円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 上にある．$c > 0$ ならば右ねじのような形になり (図 3.38)，$c < 0$ ならば左ねじのように見える (図 3.39)．$c = 0$ のときには式 (6) は円である．◀

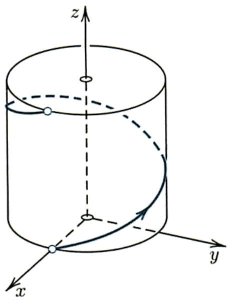


図 3.38　右手系の円らせん

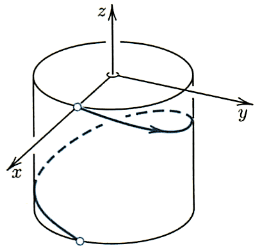


図 3.39　左手系の円らせん

単純曲線は**重複点**をもたない曲線，すなわち自分自身と交わったり接触したりしない曲線である．円や円らせんは単純曲線である．図 3.40 は単純でない曲線を示している．1 つの例は $[\,\sin 2t,\ \cos t,\ 0\,]$ である．この曲線を描けるか．

曲線の**弧**とは曲線の任意の 2 点の間の部分をさす．簡単のために，曲線の弧にも曲線全体と同じように “曲線” という言葉を使うことにしよう．



図 3.40　重複点をもつ曲線

[注意]　曲線 C はいろいろなベクトル関数によって表現することができる．C を式 (1) で表し $t = h(t^*)$ とおけば，C を表す新しいベクトル関数 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*)$ が得られる．力学 (t はふつう時間を表す) では，これは物体の運動をその経路を変えずに時間的に変化させることを意味する．たとえば，放物線 $\boldsymbol{r}(t) = [\,t,\ t^2\,]$ に対して $t = -2t^*$ とおくと，新しい表示 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*) = \boldsymbol{r}(-2t^*) = [\,-2t^*, 4t^{*2}\,]$ が得られる．変換 $t = -2t^*$ は運動 (曲線) の向きを逆転することがわかるか．それはなぜだろうか．答えは微分係数が負の値 -2 となるからである．

つぎに述べるように，曲線を直線によって近似するという観点から接線の概念と長さの定義が生まれた．接線とは曲線と接触する直線のことである．

曲線の接線

曲線 C 上の 1 点 P における C の接線は，P と C 上のほかの点 Q を通る直線 L を考えて，Q が C に沿って P に近づいたときの L の極限の位置として定義される (図 3.41).

C がベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ によって与えられ，P, Q がそれぞれパラメータ $t, t+\Delta t$ に対応しているとすれば，ベクトル

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\right]$$

は L の方向を向く．このベクトルは $\Delta t \to 0$ の極限において導関数

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\right] \tag{7}$$

を与える．ただし，今後は $\boldsymbol{r}(t)$ は微分可能と仮定する．$\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$ のときには，$\boldsymbol{r}'(t)$ は C における P の接線の方向を向く．ゆえに $\boldsymbol{r}'(t)$ を点 P における曲線 C の**接線ベクトル**とよぶ．対応する単位ベクトルは**単位接線ベクトル**

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{r}' \tag{8}$$

である (図 3.41)．$\boldsymbol{r}'$ および $\boldsymbol{u}$ は t の増加する方向に向かうことを注意しよう．したがってその向きは曲線 C の向きによって決まる．曲線の向きが逆転すれば接線ベクトルの向きも逆転する．

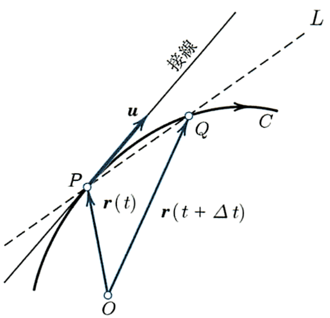


図 3.41　曲線の接線

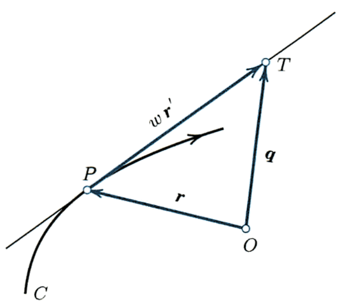


図 3.42　曲線の接線に対する公式 (9)

P における C の接線が

$$\boldsymbol{q}(w) = \boldsymbol{r} + w\boldsymbol{r}' \qquad (\text{図 } 3.42) \tag{9}$$

で与えられることは容易にわかる．これは P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と P における C の接線ベクトル $\boldsymbol{r}'$ のスカラー倍との和である．どちらのベクトルも P に依存する．変数 w がパラメータ表示 (9) のパラメータである．

例 4　楕円の接線　点 $P: (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ における楕円 $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ の接線を求めよ．

［解］ $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j}$，したがって $\boldsymbol{r}'(t) = -2\sin t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j}$ となる．$2\cos(\pi/4) = \sqrt{2}$, $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ により，P は $t = \pi/4$ に対応することがわかり，$\boldsymbol{r}'(\pi/4) = [-\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}]$ が得られる．答えは

$$\boldsymbol{q}(w) = [\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}] + w[-\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}] = \sqrt{2}(1-w)\boldsymbol{i} + (1/\sqrt{2})(1+w)\boldsymbol{j}$$

である．結果を確認するために楕円と接線を図示せよ．◀

曲線の長さ

すでに曲線の長さ l を定義する準備は整っている．図 3.43 ($n = 5$ の場合) のように，曲線上の点を結んで n 本の弦からなる折れ線を描き，n を増加させたときの折れ線の長さの極限を考えればよい．このため，曲線 C を $\boldsymbol{r}(t)$　$(a \leqq t \leqq b)$ で表そう．$n = 1, 2, \cdots$ のおのおのに対して，区間 $a \leqq t \leqq b$ を点

$$t_0(=a),\ t_1, \cdots, t_{n-1},\ t_n(=b)$$

で分割する．もちろん $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ である．これは端点を $\boldsymbol{r}(t_0), \cdots, \boldsymbol{r}(t_n)$ とする弦の折れ線を与える．この分割は各整数 n に対してまったく任意であるが，最大の分割区間幅 $|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$ が $n \to \infty$ のときに 0 になるようにしておく．これらの折れ線の長さ $l_1, l_2, \cdots$ はピタゴラスの定理から求めることができる．$\boldsymbol{r}(t)$ が連続な導関数をもつ場合には，数列 $l_1, l_2, \cdots$ は C の表示や分割の選び方に無関係な極限をもつことが証明される．この極限は積分

$$l = \int_a^b \sqrt{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'}\, dt \qquad \left(\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) \tag{10}$$

によって与えられる．l を曲線 C の長さといい，C を**長さのある**曲線という．証明は微分積分学 (付録 1 の [13] 参照) において通常扱われる平面曲線に対する

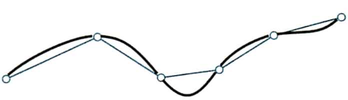


図 3.43　曲線の長さ

証明と同じであり，付録1の[10]にも載っている．積分(10)の実際の計算は一般には難しい．いくつかの簡単な場合を節末の問題27–33で扱うことにする．

曲線の弧の長さ

曲線 C の長さ l は正の定数である．しかし，式(10)の固定された上限 b を変数 t におきかえると積分は t の関数となる．この不定積分はふつう $s(t)$ と書かれ，C の**弧の長さ**(弧長関数)とよばれる．すなわち，

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'}\, d\tilde{t} \qquad \left(\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tilde{t}}\right) \tag{11}$$

となる．ただし，積分変数を $\tilde{t}$ と記したのはすでに t を上限として使用しているからである．

幾何学的には，t を $t_0 > a$ としたときの弧の長さ $s(t_0)$ は $t = a$ と $t = t_0$ に対応する2点で区切られた C の弧の長さである．a ($s = 0$ の点)の選択は任意であって，a を変えると s も定数だけ変わる．

線素 ds　式(11)を微分して2乗すれば次式が得られる．

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{12}$$

つぎのような表記も習慣上しばしば用いられる．

$$d\boldsymbol{r} = [\,dx, dy, dz\,] = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}, \tag{13*}$$

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{13}$$

この ds は C の**線素**とよばれる．

曲線表示のパラメータとしての弧の長さ　曲線のパラメータ表示(1)におけるパラメータ t として弧の長さ s を選ぶと多くの公式が著しく簡単になる．最初の実例は単位接線ベクトルに対する公式

$$\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{r}'(s) \tag{14}$$

である．これを導くには，式(12)において $t = s$ とおき $ds/ds = 1$ を考慮すればよい．曲率やねじれ率(3.7節)の場合にはさらに単純化される．

例5　円らせん，円：パラメータとしての弧の長さ　例3の円らせんに対しては，

$$\boldsymbol{r}(t) = [\,a\cos t,\ a\sin t,\ ct\,] = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}.$$

微分すれば，

$$\boldsymbol{r}'(t) = [\,-a\sin t,\ a\cos t,\ c\,] = -a\sin t\,\boldsymbol{i} + a\cos t\,\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}.$$

これから $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}' = a^2 + c^2$ となるので，

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2+c^2}\,d\tilde{t} = t\sqrt{a^2+c^2},$$

すなわち $t = s/\sqrt{a^2+c^2}$ である．弧の長さ s をパラメータとする円らせんの公式は

$$\boldsymbol{r}^*(s) = \boldsymbol{r}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\boldsymbol{j} + \frac{cs}{\sqrt{a^2+c^2}}\boldsymbol{k}$$

である．$c = 0$ の場合には $t = s/a$ となり，半径 a の円に対する表示

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{s}{a}\right) = \left[a\cos\frac{s}{a},\ a\sin\frac{s}{a}\right] = a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}$$

が得られる．この円は s が増加するときに反時計まわりに向きづけられている．$s = -s^*$ とおき $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,　$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ を使えば，

$$\boldsymbol{r}\left(-\frac{s^*}{a}\right) = \left[a\cos\frac{s^*}{a},\ -a\sin\frac{s^*}{a}\right] = a\cos\frac{s^*}{a}\boldsymbol{i} - a\sin\frac{s^*}{a}\boldsymbol{j}$$

となる．$ds/ds^* = -1 < 0$ であるから，円は今度は時計まわりに向きづけられる． ◀

❖❖❖❖❖❖ 問題 3.5 ❖❖❖❖❖❖

直　線

点 A を通りベクトル $\boldsymbol{b}$ の方向を向く直線のパラメータ表示を求め，直線を図示せよ．

1. $A: (4, 2, 0)$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
2. $A: (-1, 3, 8)$, $\boldsymbol{b} = [3, 1, 0]$
3. $A: (3, 1, 5)$, $\boldsymbol{b} = [4, 7, -1]$
4. $A: (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = [-1, 1, -1]$

2 点 A, B を通る直線のパラメータ表示を求め，直線を図示せよ．

5. $A: (2, 3, 0)$,　$B: (5, -1, 0)$
6. $A: (0, 0, 0)$,　$B: (4, 4, 1)$
7. $A: (1, 2, 3)$,　$B: (3, 2, 0)$
8. $A: (a, b, c)$,　$B: (a+4, 2-b, c-1)$

一般の曲線

つぎのパラメータ表示でどんな曲線が与えられるか．

9. $[t,\ t^3 + 2,\ 0]$
10. $[3\cos t,\ 4\sin t,\ t]$
11. $[0, 5\cos t,\ 5\sin t]$
12. $[a + 2\cos 2t,\ b - 2\sin 2t,\ 0]$
13. $[\cosh t,\ \sinh t,\ 0]$
14. $[3 + 6\cos t,\ -2 + \sin t,\ 4]$

15. (向き)　問題 14 の曲線はどんな向きをもつか．向きを逆転するもっとも簡単な変換は何か．

16. (パラメータの変換)　問題 9 において $t = e^{\tilde{t}}$ とおけば，曲線のパラメータ表示はどんな形になるか．(理由を示せ.)

つぎの曲線のパラメータ表示を求め，曲線を図示せよ．

17. $y^2 + (z-3)^2 = 9$,　$x = 0$
18. $4x^2 - 3y^2 = 12$,　$z = 1$
19. $x^2 + y^2 = 1$,　$y = z$
20. $x^2 + y^2 = 9$,　$z = 5\arctan(y/x)$

接線ベクトル，接線

曲線 $C: \boldsymbol{r}(t)$ を与えて，(a) 接線ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ と対応する単位接線ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$, (b) 与えられた点 P における $\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{u}$, (c) P における接線を求めよ．曲線と接線を図示せよ．

21. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}$, $P : (1, 1, 0)$
22. $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j}$, $P : (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$
23. $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j}$, $P : (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0)$
24. $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$, $P : (2, 0, 0)$
25. $\boldsymbol{r}(t) = \cosh t\,\boldsymbol{i} + \sinh t\,\boldsymbol{j}$, $P : (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0)$
26. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $P : (1, 1, 1)$

曲線の長さ

つぎの曲線の長さを求め，曲線を図示せよ．

27. カテナリ (懸垂線)　$\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + \cosh t\,\boldsymbol{j}$，$t = 0$ から $t = 1$ まで．
28. 円らせん　$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$，$(a, 0, 0)$ から $(a, 0, 2\pi c)$ まで．
29. **3/2 乗放物線**　$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^{3/2}\,\boldsymbol{j}$，$(0, 0, 0)$ から $(4, 8, 0)$ まで．
30. **4 尖点内サイクロイド**　$\boldsymbol{r}(t) = a\cos^3 t\,\boldsymbol{i} + a\sin^3 t\,\boldsymbol{j}$ の全長．

31. (表示 $y = f(x)$)　$x = a$ から $x = b$ までの長さに対する公式

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

を式 (10) から導け．

32. (**極表示** $\rho = \rho(\theta)$)　平面の極座標 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\theta = \arctan(y/x)$ に対しては，$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$ したがって

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta \qquad \left(\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}\right)$$

がなりたつことを示せ．**カルジオイド** (心臓形) $\rho = a(1 - \cos\theta)$ の全長を求めよ．その概略を描け．

33. **[CAS プロジェクト]　有名な曲線**[10)]　歴史的には，関数の概念は幾何学的ないし力学的問題で現れた曲線によって発展した．各種の曲線は広範な研究の対象として有名になった．ドイツ語の標準書 Loria G., *Special Algebraic and Transcendental Plane Curve* (Leipzig, Teubner, 1902) を参照するとよい．CAS を用いてつぎの曲線をプロットし，定数 a, b に対する依存性を調べよ．(r, θ は極座標である．)

アルキメデスのらせん	$r = a\theta$
双曲らせん	$r = \dfrac{a}{\theta}$
対数らせん	$r = ae^{b\theta}$
アステロイド (4 尖点内サイクロイド)	$x = 4\cos^3 t$,　$y = 4\sin^3 t$
カルジオイド	$r = a(1 - \cos\theta)$
デカルトの葉線	$r = \dfrac{3a\sin 2\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$
ディオクレスのシッソイド	$r = \dfrac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$
ラメの曲線	$x^4 + y^4 = 1$

---

10) 各曲線は，Archimedes (287?–212B.C.)，Descartes (3.1 節)，Diocles (200 頃 B.C.)，Gabriel Lamé (1795–1870)，Colin Maclaurin (1698–1746，第 4 巻 3.4 節)，Nicomedes (250 頃 B.C.)，Pascal (4.4 節)，Steiner (4.6 節) にちなんで命名された．

マクローリンの 3 等分曲線	$r = 2a\dfrac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$
ニコメデスのコンコイド	$r = \dfrac{a}{\cos\theta} + b$
パスカルのリマソン (蝸牛線)	$r = 2a\cos\theta + b$
シュタイナーの内サイクロイド	$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$

3.6　力学における曲線，速度と加速度

今まで幾何学的観点から論じてきた曲線は，力学では運動する物体の経路としての役割を果たすことになる．そこで，今後は t を時間とみなして，$\boldsymbol{r}(t)$ によって与えられる経路 (曲線)C を考え，前節では幾何学的に解釈した導関数 $\boldsymbol{r}'(t)$ (および 2 階導関数 $\boldsymbol{r}''(t)$) が力学においても基本的であることを示そう．

3.5 節から，ベクトル

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}} \qquad (1)$$

は C に接していて物体の運動の瞬間的な方向に向くことがわかる．3.5 節の式 (12) によれば，このベクトルの大きさは

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'} = \frac{ds}{dt}$$

である．ここで，s は曲線 C の弧の長さであって，C 上の固定点 $(s=0)$ から P まで曲線に沿って測った距離を意味する．ゆえに ds/dt は P の**速さ**である．ベクトル $\boldsymbol{v}$ は運動の**速度ベクトル**[11]とよばれる．

速度ベクトルの導関数を**加速度ベクトル**とよび $\boldsymbol{a}$ と記す．こうして

$$\boxed{\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{r}''(t)} \qquad (2)$$

が得られる．

例 1　向心加速度，遠心力　ベクトル関数

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \qquad (\omega > 0)$$

は，中心が原点で半径が R である xy 平面上の円 C を表現していて，反時計まわりに動く粒子 (点 P) の運動を記述する．速度ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}' = -R\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + R\omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}$$

は C の接線ベクトル (図 3.44) である．その大きさつまり速さ

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'} = R\omega$$

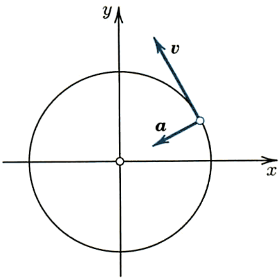


図 3.44　向心加速度

11)　混乱が起こるおそれのないときには，速さ $|\boldsymbol{v}|$ を速度ということもある．

は一定である．**角速度** (速さを中心からの距離 R で割った値) は ω に等しい．加速度ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}' = -R\omega^2 \cos\omega t\, \boldsymbol{i} - R\omega^2 \sin\omega t\, \boldsymbol{j} = -\omega^2 \boldsymbol{r} \qquad (3)$$

である．一定の大きさ $|\boldsymbol{a}| = \omega^2|\boldsymbol{r}| = \omega^2 R$ をもち原点に向かう加速度が存在していることがわかる．$\boldsymbol{a}$ を**向心加速度**という．これは速度ベクトルが一定の速さで方向を変えることが原因となって生じるものである．粒子 P の質量を m とすると**向心力**は $m\boldsymbol{a}$ である．逆向きのベクトル $-m\boldsymbol{a}$ は**遠心力**とよばれる．P 上の観測者から見ればこの 2 つの力は運動の各瞬間につり合っている． ◀

接線加速度と法線加速度

つぎに，加速度を運動方向の成分と垂直方向の成分へ分解することを考えよう．この問題の実用上の重要性は自動車，航空機，ロケットなどの運動を考えればほとんど自明である．

$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{v}$ の時間的変化率であることは明らかである．例 1 において $|\boldsymbol{v}|$ が一定なのに $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ であることは，$\boldsymbol{a}$ の大きさが一般に $|\boldsymbol{v}|$ の変化率でないことを示している．その理由は一般に $\boldsymbol{a}$ が経路 C に接してはいないということである．実際，微分の連鎖法則を式 (1) に適用すれば，

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{u}(s)\frac{ds}{dt}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{u}(s) = d\boldsymbol{r}/ds$ は C の単位接線ベクトル (3.5 節) である．これをふたたび微分して

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}(s)\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \boldsymbol{u}(s)\frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (4)$$

を得る．$\boldsymbol{u}(s)$ は C に接する大きさ一定の単位ベクトルであるから，$d\boldsymbol{u}/ds$ は $\boldsymbol{u}(s)$ に垂直である (3.4 節の例 4)．したがって，式 (4) は加速度ベクトルの法線成分 $(d\boldsymbol{u}/ds)(ds/dt)^2$ と接線成分 $\boldsymbol{u}(s)(d^2s/dt^2)$ への分解を表す．前者を**法線加速度**，後者を**接線加速度**とよぶ．このことから，法線加速度が $\boldsymbol{0}$ ならば，またそのときに限り $|\boldsymbol{a}|$ は $|\boldsymbol{v}| = ds/dt$ の時間的変化率に (符号は除いて) 等しい．なぜならば，そのときには式 (4) から $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{u}(s)|\,|d^2s/dt^2| = |d^2s/dt^2|$ となるからである．

法線加速度を $\boldsymbol{a}_{\text{norm}}$，接線加速度を $\boldsymbol{a}_{\text{tan}}$ と記すと，式 (4) は

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{norm}} + \boldsymbol{a}_{\text{tan}}$$

と書きかえられる．$\boldsymbol{a}_{\text{tan}}$ の大きさは $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{v}$ の方向への射影であり，3.2 節の式 (11) から $|\boldsymbol{a}_{\text{tan}}| = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ として与えられる．よって，$\boldsymbol{a}_{\text{tan}}$ は $\boldsymbol{v}$ の方向の単

位ベクトル $(1/|\boldsymbol{v}|)\boldsymbol{v}$ の $|\boldsymbol{a}_{\tan}|$ 倍，すなわち

$$\boldsymbol{a}_{\tan} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} \tag{4*}$$

である．

例 1 においては，式 (3) と図 3.44 から接線加速度が $\mathbf{0}$ であることがわかる．もちろんこれは一般の場合ではない．つぎに興味深い実例を示そう．

例 2 **接線加速度と法線加速度，コリオリ**[12]**の加速度**　小物体 (点 B) が円板上を中心から端に向かって動いていて，その位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{b} \tag{5}$$

で表される場合を考える．円板は反時計まわりに一定の角速度 $\omega = 1$ で回転し，$\boldsymbol{b}$ は円板とともに回転する単位ベクトルである (図 3.45)．B の加速度 $\boldsymbol{a}$ を求めよ．

[解]　$\boldsymbol{b}$ は回転しているため，

$$\boldsymbol{b} = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} \tag{5'}$$

と書ける．式 (5) を微分すれば，速度は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}' = (t\boldsymbol{b})' = \boldsymbol{b} + t\boldsymbol{b}' \tag{6}$$

となる．明らかに，$\boldsymbol{b}$ は B の円板に対する相対速度であり，$t\boldsymbol{b}'$ は回転によって付加される速度である．

ふたたび微分することによって，加速度

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{r}'' = (\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{b}')' = 2\boldsymbol{b}' + t\boldsymbol{b}'' \tag{7}$$

を得る．式 (5′) を 2 回微分すると $\boldsymbol{b}'' = -\boldsymbol{b}$ となるため，式 (7) の右辺の最後の項は $t\boldsymbol{b}'' = -t\boldsymbol{b}$ である．例 1 からこれは回転による向心加速度であることがわかる．実際，中心から B までの距離は t に等しい ($\boldsymbol{b}$ は単位ベクトルだから) ので，t は例 1 における R の役割を果たす．

式 (7) においてもっとも興味深く，おそらく予測もされなかった項は $2\boldsymbol{b}'$ である．これは**コリオリの加速度**といわれ，円板の回転と円板上の B の運動との相互作用によっ

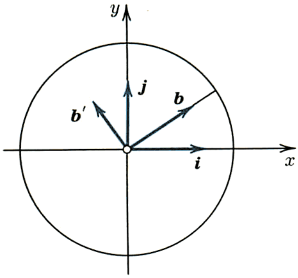


図 3.45　例 2 におけるベクトル

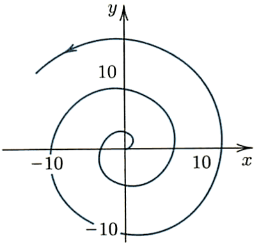


図 3.46　例 2 における運動

12) Gustave Gaspard Coriolis (1792–1843)，フランスの技術者．力学を研究した．

て生じたものである．その方向は $\boldsymbol{b}'$ の方向すなわち円周の接線方向であって，固定された xy 座標系から見れば回転の方向をさす．もしも B が式 (5) に従って円板上を歩く質量 m_0 の人であるとすれば，この人は回転の方向とは逆向きに力 $-2m_0\boldsymbol{b}'$ を感じることだろう．

固定した xy 平面上では，B は図 3.46 のように渦巻き形に動く．接線加速度 $\boldsymbol{a}_{\tan}$ の大きさは $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{v}$ 方向の成分として与えられる．3.2 節の式 (12) 中の $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{v}$ でおきかえ，$|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}'| = 1$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}' = 0$，$\boldsymbol{b}'' = -\boldsymbol{b}$ を使えば，

$$\boldsymbol{a}_{\tan} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} = \frac{(2\boldsymbol{b}' + t\boldsymbol{b}'')\cdot(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{b}')}{|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{b}'|^2}(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{b}') = \frac{t}{1+t^2}(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{b}')$$

となる．ゆえに，法線加速度は

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\tan} = \frac{2+t^2}{1+t^2}(\boldsymbol{b}' - t\boldsymbol{b})$$

である．これらの 2 つのベクトルが直交することを確かめよ．◀

例 3　2 つの回転の重ね合わせ，コリオリの加速度　自転する地球表面 (半径 R の回転球面) の子午線 M に沿って発射体 (点 B) が一定の相対速度 (角速度 γ) で移動している．この運動は

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} + R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \qquad (\gamma > 0), \tag{8}$$

および

$$\boldsymbol{b}(t) = \cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j} \qquad (図\ 3.47)$$

によって記述される．ただし，$\omega\,(>0)$ は地球の角速度であり，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ はそれぞれ空間に固定された正の x, y 方向の単位ベクトルである．式 (8) を微分して，速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}' = R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b}' - \gamma R\sin\gamma t\,\boldsymbol{b} + \gamma R\cos\gamma t\,\boldsymbol{k}$$

を得る．これをもう 1 回微分すれば，加速度は

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}' = R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b}'' - 2\gamma R\sin\gamma t\,\boldsymbol{b}' - \gamma^2 R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} - \gamma^2 R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{9}$$

となる．右辺の第 1 項は地球の自転による向心加速度である．第 2 項は**コリオリの加速度**であり，図 3.47 では $\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}}$ と記されている．第 3 項は M 上の B の運動による向心加速度である．

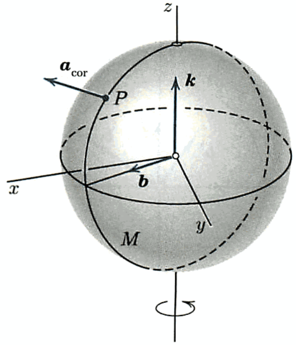


図 3.47　2 回転の重ね合わせ

北半球においては $\sin\gamma t > 0$ であるから (式 (8))，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}}$ は $-\boldsymbol{b}'$ と同じ方向をもち，地球の回転と逆向きである．$|\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}}|$ は北極で最大であり，赤道上では 0 になる．質量 m_0 の発射体 B は，$m_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}}$ と反対方向の $-m_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}}$ という力を感じる．この力は B を軌道 M から右側 (南半球では $\sin\gamma t < 0$ なので左側) にそらせようとする傾向がある．このような効果はミサイル，ロケット，砲弾などの発射体や大気流において観測される．◀

❖❖❖❖❖ 問題 3.6 ❖❖❖❖❖

運動する物体 (自動車，航空機など) にはたらく力を求めるためには接線加速度と法線加速度を知る必要がある．つぎの運動の接線加速度と法線加速度を見いだし，経路をスケッチせよ．

1. $\boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$

2. $\boldsymbol{r}(t) = \sin t\,\boldsymbol{i}$

3. $\boldsymbol{r}(t) = 5t^2\boldsymbol{k}$

4. $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos 2t\,\boldsymbol{i} - 2\sin 2t\,\boldsymbol{j}$

5. $\boldsymbol{r}(t) = b\cos t\,\boldsymbol{i} + b\sin t\,\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$

6. $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin 2t\,\boldsymbol{j}$

7. $\boldsymbol{r}(t) = e^t\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j}$

8. ［**CAS プロジェクト**］ 問題 1–7 よりも複雑な運動の経路が歯車伝動などの工学的機構において現れる．この種の運動は CAS を使って比較的容易にプロットすることができる．考え方を理解するために，つぎの経路をプロットし，対応する速度，速さ，接線加速度，法線加速度を求めよ．

(a) $\boldsymbol{r}(t) = [\,2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t\,]$　(シュタイナーの内サイクロイド)

(b) $\boldsymbol{r}(t) = [\,\cos t + \cos 2t,\ \sin t - \sin 2t\,]$

(c) $\boldsymbol{r}(t) = [\,\cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t\,]$

(d) $\boldsymbol{r}(t) = [\,ct\cos t,\ ct\sin t,\ ct\,]$　$(c \neq 0)$

9. **(サイクロイド)** $\boldsymbol{r}(t) = (R\sin\omega t + \omega Rt)\boldsymbol{i} + (R\cos\omega t + R)\boldsymbol{j}$ で $R = 1,\ \omega = 1$ としたときの曲線を描け．これはいわゆるサイクロイドであって，x 軸に沿って滑らかに転がる半径 R のリム (車輪の外わく) の経路を表す．曲線上の y の最大値および最小値における $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{a}$ を求めよ．

10. **(楕円軌道)** 運動 $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j}$ を考え，最大の速さと最大の加速度を与える点を定めよ．(はじめに推測してから計算せよ．) 接線加速度と法線加速度を求めよ．

11. **(回転)** $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ (3.3 節の式 (9)) から微分によって式 (3) を導け．

12. **(コリオリの加速度)** 例 2 の式 (5) を $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{b}$ におきかえてコリオリの加速度を求めよ．

13. **(太陽と地球)** 地球の太陽への向心加速度を式 (3) から求めよ．ただし，地球は太陽のまわりにほとんど一定の速さ (30 km/s) でほぼ円軌道を描いている．

14. **(地球と月)** 月の地球への向心加速度を求めよ．ただし，月の軌道は半径 239000 [マイル] $= 3.85 \times 10^8$ [m] であり，公転の周期は 27.3 [日] $= 2.36 \times 10^6$ [s] であると仮定する．

15. **(衛星)** 地表から高度 80 マイルで運行する人工衛星の速さを求めよ．ただし，地表における重力の加速度を $g = 31$[フィート/s^2]，地球の半径を 3960 マイルとする．

［ヒント］ 例 1 参照．

16. **(衛星)** ある衛星が地表から高度 360 マイルの円軌道に沿って運行し，100 分ごとに地球を 1 周している．このデータと地球の半径 (3960 マイル) から衛星軌道における重力の加速度を見いだせ．

3.7 曲線の曲率とねじれ率［選択］

本節では 3.5 節とともに空間曲線の理論の基礎について述べるが，本節の題材は今後とくに必要とはされないので，選択課目として適宜省略してもよい．

s を弧の長さとして，パラメータ表示 $\boldsymbol{r}(s)$ によって表される曲線 C を考える．曲線 C の**曲率**は

$$\kappa(s) = |\boldsymbol{u}'(s)| = |\boldsymbol{r}''(s)| \qquad \left({}'=\frac{d}{ds}\right) \tag{1}$$

として定義される．ここで $\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$ は C の単位接線ベクトル (3.5 節) である．$\boldsymbol{r}(s)$ は 2 回微分可能，すなわち $\boldsymbol{r}''(s)$ が存在すると仮定しておく．

式 (1) によれば，κ は単位接線ベクトルの s に対する変化率の大きさであることがわかる．したがって，κ は C の各点において接線からのずれの程度を測ったものである．実例は例 1 と節末の問題に示す．一般のパラメータ t の場合には曲率の公式はもっと複雑になる (節末の問題 2)．

図 3.48 は曲率 $\kappa \neq 0$ (よって $\kappa > 0$) の曲線 C の **3 面体**を示している．これは互いに垂直な 3 つの単位ベクトルからなる右手系の 3 つ組 (3.3 節) である．すなわち，C の**単位接線ベクトル**

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}'$$

のほかに，**単位主法線ベクトル**

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{|\boldsymbol{u}'|}\boldsymbol{u}' = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{u}' \qquad (\kappa > 0), \tag{2}$$

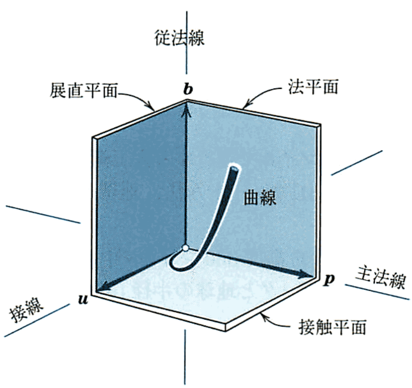


図 3.48　3 面体

および**単位従法線ベクトル**

$$\boxed{\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{p}} \qquad (\kappa > 0) \qquad (3)$$

を導入する．式 (1) により $|\boldsymbol{u}'| = \kappa$ であるから，$\boldsymbol{p}$ は単位ベクトルである．$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1$ は $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}' = 0$ を意味するので，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{p}$ は互いに垂直である．ベクトル積の定義から，ベクトル $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{p}$ に垂直な単位ベクトルである．これで，$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{p}| = 1$ のほか $|\boldsymbol{b}| = 1$ が成立することと，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}$ が右手系の 3 つ組を構成することが証明された．

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}$ の方向の直線をそれぞれ C の**接線**，**主法線**，**従法線**という．図 3.48 には，これらのベクトルの対が張る 3 つの平面の名称 (**接触平面**，**展直平面**，**法平面**) も記されている．

曲線のねじれ率

曲率 $\kappa(s)$ は曲線 C の各点において C の接線からのずれを測ったが，ねじれ率 $\tau(s)$ は C の接触平面 (図 3.48) からのずれを測ったものである．**ねじれ率**は

$$\boxed{\tau(s) = -\boldsymbol{p}(s) \cdot \boldsymbol{b}'(s)} \qquad (4)$$

によって定義される．式 (4) に現れる $\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{b}$ の変化率であるが，$\boldsymbol{b}$ は接触平面の法線ベクトルだから，この接触平面の変化率とも考えられる．ここで負の符号をつけたのは，右手系の円らせん (3.5 節) に対して τ が正の値をとるようにするためである．平面曲線に対しては $\boldsymbol{b}$ は定ベクトル，したがって $\tau \equiv 0$ である．

式 (4) では従来と同様に $\kappa(s) > 0$ で $\boldsymbol{p}$ が存在すると仮定し，そのうえ C を表す $\boldsymbol{r}(s)$ が 3 回微分可能で $\boldsymbol{b}'$ も存在すると仮定している．$\boldsymbol{b}' \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{p}$ と同じ方向に向き式 (4) が導かれることを示そう．$\boldsymbol{b}'$ は $|\boldsymbol{b}| = 1$ により $\boldsymbol{b}$ に垂直である．それはまた $\boldsymbol{u}$ にも垂直である．実際，式 (2) からすぐわかるように，$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{b} \cdot (\kappa \boldsymbol{p}) = \kappa \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p} = 0$ すなわち $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}' = 0$ が得られるので，$(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{u} = 0$ となる．ゆえに，$\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{p}$ と同じ方向をもちたとえば

$$\boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{p} \qquad (\kappa > 0) \qquad (5)$$

と書くことができる．これと $\boldsymbol{p}$ の内積をとれば式 (4) が得られる．

ここで導入した諸概念は曲線の理論と応用において基本的なものである．つぎに典型的な実例によって説明しよう．ほかの応用については節末の問題を参照するとよい．

例 1 円らせん，円 3.5 節の式 (6) で与えられた円らせんの場合には，弧の長さが $s = t\sqrt{a^2+c^2}$ であった (3.5 節の例 5)．したがって，円らせんは

$$\boldsymbol{r}(s) = a\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j} + c\frac{s}{K}\boldsymbol{k} \qquad (\text{ただし } K = \sqrt{a^2+c^2})$$

と表すことができる．これから次式が導かれる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(s) &= \boldsymbol{r}'(s) = -\frac{a}{K}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{i} + \frac{a}{K}\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{j} + \frac{c}{K}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{r}''(s) &= -\frac{a}{K^2}\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i} - \frac{a}{K^2}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j},\\
\kappa(s) &= |\boldsymbol{r}''| = \sqrt{\boldsymbol{r}''\cdot\boldsymbol{r}''} = \frac{a}{K^2} = \frac{a}{a^2+c^2},\\
\boldsymbol{p}(s) &= \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{r}''(s) = -\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i} - \sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{b}(s) &= \boldsymbol{u}(s)\times\boldsymbol{p}(s) = \frac{c}{K}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{i} - \frac{c}{K}\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{j} + \frac{a}{K}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{b}'(s) &= \frac{c}{K^2}\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i} + \frac{c}{K^2}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j},\\
\tau(s) &= -\boldsymbol{p}(s)\cdot\boldsymbol{b}'(s) = \frac{c}{K^2} = \frac{c}{a^2+c^2}.
\end{aligned}$$

よって，円らせんでは曲率，ねじれ率ともに一定であることがわかる．$c>0$ (右手系円らせん，図 3.38) ならば $\tau>0$，$c<0$ (左手系円らせん，図 3.39) ならば $\tau<0$ である．

$c=0$ のときには半径 a の円となり，曲率とねじれ率の公式は $\kappa = 1/a$ (曲率は半径の逆数) および $\tau = 0$ を与える．また，$\boldsymbol{b}(s)$ は円の平面 (xy 平面) に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ に等しい． ◀

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},\boldsymbol{b}$ は 1 次独立であるから，空間のいかなるベクトルもこの 3 つのベクトルの 1 次結合として表される．したがって，もし導関数 $\boldsymbol{u}',\boldsymbol{p}',\boldsymbol{b}'$ が存在するならば，それらもやはり $\boldsymbol{u},\boldsymbol{p},\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で表すことができる．その表式が有名な**フルネ**[13]**の公式**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}' &= \qquad\ \kappa\boldsymbol{p}, &\qquad (6\text{a})\\
\boldsymbol{p}' &= -\kappa\boldsymbol{u} \qquad\ + \tau\boldsymbol{b}, &\qquad (6\text{b})\\
\boldsymbol{b}' &= \qquad -\tau\boldsymbol{p} &\qquad (6\text{c})
\end{aligned}$$

である．式 (6a) は式 (2) からただちに導かれるし，式 (6c) は式 (5) と同じである．式 (6b) の導き方も難しくはないので読者に任せる (節末の問題 16)．

曲線の曲率 $\kappa(>0)$ とねじれ率 τ を弧の長さ s の連続関数として与えれば，曲線は空間的な位置を除いて一意的に決定される．(証明については付録 1 の [10] を参照せよ.) このため，$\kappa=\kappa(s)$ および $\tau=\tau(s)$ を曲線の**自然方程式**とよぶ．これも曲率やねじれ率が空間曲線の微分幾何学において基本的である理由

13) Jean–Frédéric Frenet (1816–1900)，フランスの数学者．

を示している.

これで 1 変数のベクトル関数とその幾何学や力学への応用についての議論は終わる.

問題 3.7

曲線の曲率

1. 半径 a の円の曲率は $1/a$ に等しいことを示せ.

2. 曲線が $\boldsymbol{r}(t)$ (t は任意のパラメータとする) で表されるとき，その曲率が

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'' \cdot \boldsymbol{r}'') - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'')^2}}{(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}')^{3/2}} \qquad (\mathbf{1}')$$

で与えられることを式 (1) を使って証明せよ.

3. 式 $(1')$ を用いて，xy 平面上の曲線 $y = y(x)$ の曲率が

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx} \text{など}\right) \qquad (\mathbf{1}'')$$

であることを証明せよ.

次式がどのような曲線を表すかを述べ，式 $(1')$ または式 $(1'')$ を使って曲率を求めよ.

4. $\boldsymbol{r} = a\cos t\,\boldsymbol{i} + b\sin t\,\boldsymbol{j}$

5. $y = x^2$

6. $xy = c$

7. $\boldsymbol{r} = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$

8. $\boldsymbol{r} = \cosh t\,\boldsymbol{i} + \sinh t\,\boldsymbol{j}$

9. $\boldsymbol{r} = t\,\boldsymbol{i} + t^{3/2}\boldsymbol{j} \quad (t \geqq 0)$

曲線のねじれ率

10. 式 (3), (4) を使って，曲線 $C : \boldsymbol{r}(s)$ の曲率 $\tau(s)$ が

$$\tau(s) = (\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{p}') \qquad (\kappa > 0) \qquad (\mathbf{4}')$$

で与えられることを示せ.

11. 式 (2) を使って，式 $(4')$ が

$$\tau(s) = (\boldsymbol{r}' \quad \boldsymbol{r}'' \quad \boldsymbol{r}''')/\kappa^2 \qquad (\kappa > 0) \qquad (\mathbf{4}'')$$

と書きかえられる ($' = d/ds$ など) ことを示せ.

12. t を任意のパラメータとして曲線 C を $\boldsymbol{r}(t)$ で表したとき，式 $(4'')$ が

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}' \quad \boldsymbol{r}'' \quad \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'' \cdot \boldsymbol{r}'') - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'')^2} \qquad (\kappa > 0) \qquad (\mathbf{4}''')$$

となる ($' = d/dt$ など) ことを示せ.

13. $\kappa > 0$ の平面曲線のねじれ率は恒等的に 0 であることを証明せよ.

14. 式 $(4''')$ を使って，円らせん $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$ のねじれ率を求めよ．その結果を例 1 と比較せよ.

15. 曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ (図 3.48 の曲線によく似ている) のねじれ率を求めよ.

16. フルネの公式 (6b) を証明せよ.

［ヒント］ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}$ を微分することからはじめよ.

3.8 多変数の微分法の復習［選択］

今後は 1 変数のベクトル関数から多変数のベクトル関数に話題をうつそう．本節ではまず多変数の微分法の復習をする．もちろんすでに学習ずみの読者は本節をとばして次節に進み，あとは必要に応じて参照するだけでよい．(偏導関数については付録 A3.2 を参照せよ.)

連鎖法則

定理 1 (連鎖法則)　関数 $w = f(x, y, z)$ は xyz 空間の領域[14] D において連続であり，しかも連続な 1 階導関数をもつとする．また $x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$，$z = z(u, v)$ は，uv 平面の領域 B において連続で 1 階偏導関数をもつ関数であって，B の中の各点 (u, v) に対応する点 $[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]$ が D の中にあるものとする．そのとき，関数

$$w = f\bigl(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\bigr)$$

が B において定義され，B 内の u および v に関する 1 階偏導関数をもち，

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},\\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned} \tag{1}$$

がなりたつ．

実際上重要な特別な場合

$w = f(x, y)$，　$x = x(u, v)$，　$y = y(u, v)$ のとき式 (1) はつぎのようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned} \tag{2}$$

$w = f(x, y, z)$，　$x = x(t)$，　$y = y(t)$，　$z = z(t)$ ならば式 (1) は

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{3}$$

となる．$w = f(x, y)$，　$x = x(t)$，　$y = y(t)$ ならば式 (3) は

14)　"領域" D とは連結している開いた点集合のことである．ここで "連結" とは，D の任意の 2 点がすべて D 内の点からなる有限個の線分をつないだ折れ線で結ぶことができることをいう．また "開いた" とは，D のすべての点 P が D に属する点のみからなる近傍 (P を中心とする小球) をもつことをいう．たとえば，立方体や楕円体 (境界面を除いた立体) は領域である．

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (4)$$

に帰着する．もっとも簡単な場合，すなわち $w = f(x)$，$x = x(t)$ のときには

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad (5)$$

が得られる．

例 1　連鎖法則　極座標 r, θ は $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ によって定義される．$w = x^2 - y^2$ とすれば，式 (2) より

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2x\cos\theta - 2y\sin\theta = 2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta = 2r\cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2x(-r\sin\theta) - 2y(r\cos\theta) = -2r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta = -2r^2\sin 2\theta.$$ ◀

平均値定理

定理 2（平均値定理）　関数 $f(x, y, z)$ は xyz 空間の領域 D において連続であり，連続な 1 階偏導関数をもつものとする．D 内の 2 点 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ と $P : (x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ を，それらを結ぶ線分 P_0P が完全に D 内に含まれるようにとる．そのとき，

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (6)$$

である．偏導関数の値はその線分上の適当な点における値である．

特別な場合

定理と同様な仮定を満足する 2 変数関数 $f(x, y)$ に対しては，公式 (6) は

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (7)$$

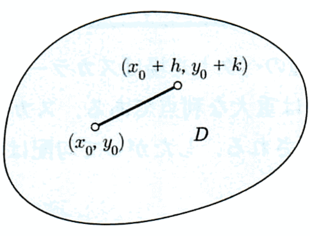


図 3.49　2 変数関数の平均値定理（公式 (7)）

に帰着する (図 3.49)．1 変数関数 $f(x)$ に対しては，公式 (6) は

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\frac{df}{dx} \qquad (8)$$

と書ける．この場合には，領域 D は x 軸上の線分であり導関数の値は x_0 と x_0+h の間の適当な点でとるものとする．

❖❖❖❖❖ 問題 3.8 ❖❖❖❖❖

式 (3) または式 (4) を用いて dw/dt を計算し，その結果を代入と微分によって確認せよ．(計算の詳細を示せ.)

1. $w=\sqrt{x^2+y^2},\ x=e^{4t},\ y=e^{-4t}$

2. $w=x/y,\ x=g(t),\ y=h(t)$

3. $w=x^y,\ x=\cos t\quad y=\sin t$

4. $w=xy+yz+zx,\ x=t,\ y=\cos t,\ z=\sin t$

5. $w=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2},\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$

$\partial w/\partial u$ および $\partial w/\partial v$ を計算し，その結果を代入と微分によって確認せよ．

6. $w=x^2+y^2,\ x=u+v,\quad y=u-v$

7. $w=xy,\quad x=e^u\cos v,\ y=e^u\sin v$

8. $w=x^4-4x^2y^2+y^4,\ x=uv,\ y=u/v$

9. $w=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1},\ x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2,\ z=2uv$

10. **(曲面上の偏導関数)** $w=f(x,y,z)$ とし，$z=g(x,y)$ が空間の曲面を表すものとする．S 上ではこの関数は

$$\widetilde{w}(x,y)=f(x,\ y,\ g(x,y))$$

となる．偏導関数が

$$\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x},\qquad \frac{\partial\widetilde{w}}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\qquad (z=g(x,y))$$

から得られることを示せ．これを $f=x^3+y^3+z^2$，$g=x^2+y^2$ に適用し，代入と微分によって検算せよ．(一般の公式は 4.9 節で必要になる.)

3.9 スカラー場の勾配，方向微分

実際に応用されるある種のベクトル場はスカラー場から導かれる．スカラー場は扱いやすいのでこれは重大な利点である．スカラー場に関連するベクトル場は “勾配” の形で実現される．したがって勾配は実用面できわめて重要である．

勾配の定義

与えられたスカラー関数 $f(x, y, z)$ の**勾配** $\mathrm{grad}\, f$ とは，

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (1^*)$$

によって定義されるベクトル関数である．もちろん f は微分可能と仮定しなければならない．微分演算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

(ナブラまたは "デル" と読む) を導入すれば，

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

と書ける．この表記法は物理学者や工学者にとってなじみが深い．例として $f(x, y, z) = 2x + yz - 3y^2$ をとれば，$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = 2\boldsymbol{i} + (z - 6y)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ となる．

ここで導入した勾配 $\mathrm{grad}\, f$ がベクトル関数であることは自明ではない．これを証明するためには，式 (1) で成分を用いて定義された $\mathrm{grad}\, f$ がデカルト座標の選び方には無関係な大きさと方向をもつことを示さなければならない．しかし，その前にまず勾配がいろいろな方向の f の変化率とどのように関係するかを調べよう．3 つの座標軸の方向では，この変化率は偏導関数として与えられることが微分法からわかる．これを任意の方向に拡張すれば自然に方向微分という概念に到達する．

方 向 微 分

任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ によって与えられる一定の方向を考えたとき，任意の点 P における f のその方向の変化率は微分法と同様に定義される．これは f の P における $\boldsymbol{b}$ の方向の**方向微分係数**とよばれ，$D_{\boldsymbol{b}}f$ あるいは df/ds と記され，

$$D_{\boldsymbol{b}}f = \frac{df}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s} \qquad (3)$$

で定義される．ただし，Q は $\boldsymbol{b}$ の方向の半直線 C 上を動く点であり，s は P から Q までの距離である (図 3.50)．

つぎに，デカルト座標 x, y, z を使い $\boldsymbol{b}$ として単位ベクトルをとれば，半直線 C は

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_0 + s\boldsymbol{b} \qquad (s \geqq 0,\ |\boldsymbol{b}| = 1) \qquad (4)$$

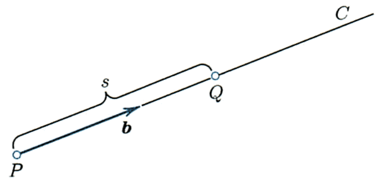


図 3.50　方向微分係数

によって与えられる ($\boldsymbol{p}_0$ は P の位置ベクトル)．式 (3) は $D_{\boldsymbol{b}}f = df/ds$ が C の弧の長さ s に関する関数 $f(x(s),\ y(s),\ z(s))$ の導関数であることを示す．ゆえに，f が連続な偏導関数をもつと仮定し連鎖法則 (3.8 節の公式 (3)) を適用すると，

$$D_{\boldsymbol{b}}f = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' \tag{5}$$

が得られる．ここで，プライム記号 $'$ は s に関する導関数を表す ($s = 0$ における値をとる)．式 (4) により $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}$ であるから，式 (5) は簡単に $\boldsymbol{b}$ と $\operatorname{grad} f$ の内積 (3.2 節の式 (2)) となる．すなわち，

$$D_{\boldsymbol{b}}f = \frac{df}{ds} = \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{grad} f \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1). \tag{6}$$

方向が任意の大きさ ($\neq 0$) のベクトル a によって表される場合には，式 (6) は

$$D_{\boldsymbol{a}}f = \frac{df}{ds} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} f \tag{6'}$$

にかわることを注意しておく．

例 1　勾配，方向微分係数　点 $P : (2, 1, 3)$ において，ベクトル $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$ の方向での $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ の方向微分係数を求めよ．

［解］　勾配は

$$\operatorname{grad} f = 4x\boldsymbol{i} + 6y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}, \qquad \text{点 } P \text{ では } \operatorname{grad} f = 8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

である．これと式 (6′) から，

$$D_{\boldsymbol{a}}f = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}) \cdot (8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) = \frac{1 \cdot 8 - 2 \cdot 6}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1.789$$

を得る．負号は f が P において $\boldsymbol{a}$ の方向に減少することを意味する．◀

最大増加方向としての勾配

定理 1（勾配，最大増加）　$f(P) = f(x, y, z)$ を連続な 1 階導関数をもつスカラー関数とする．そのとき $\operatorname{grad} f$ が存在し，その大きさと方向は空間のデ

カルト座標の選び方によらない．f の勾配が点 P において零ベクトルでなければ，それは P における f の最大の増加の方向をもつ．

［証明］ 式 (6) と内積の定義 (3.2 節の式 (1)) から

$$D_{\boldsymbol{b}} f = |\boldsymbol{b}|\,|\mathrm{grad}\, f| \cos\gamma = |\mathrm{grad}\, f| \cos\gamma \tag{7}$$

が得られる．ただし γ は $\boldsymbol{b}$ と $\mathrm{grad}\, f$ のなす角である．f はスカラー関数であるから，点 P における f の値は P のみに依存し座標の選び方には依存しない．半直線 C (図 3.50) の弧の長さや $D_{\boldsymbol{b}} f$ についても同様である．$D_{\boldsymbol{b}} f$ は $\cos\gamma = 1$，$\gamma = 0$ のときに最大で，そのとき $D_{\boldsymbol{b}} f = |\mathrm{grad}\, f|$ である．これは $\mathrm{grad}\, f$ の大きさと方向が座標に無関係であることを示す．$\gamma = 0$ は $\boldsymbol{b}$ が $\mathrm{grad}\, f$ と同じ方向を向くことと同値であるから，P において $\mathrm{grad}\, f \neq \mathbf{0}$ ならば，$\mathrm{grad}\, f$ の方向は P における f の最大の増加の方向である． ◀

曲面の法線ベクトルとしての勾配

勾配のほかの基本的な応用は曲面などへの幾何学的な応用である．空間における曲面 S が

$$f(x, y, z) = c = \text{一定} \tag{8}$$

によって与えられているとする．空間曲線 C は

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{9}$$

で表すことができる (3.5 節の式 (1))．C が S 上にあるためには，成分 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ が式 (8) を満足しなければならない．こうして

$$f(x(t),\ y(t),\ z(t)) = c \tag{10}$$

が得られる．ここで，C の接線ベクトルは 3.5 節の式 (7) により

$$\boldsymbol{r}'(t) = x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k}$$

である．C が S 上にあるときにはこの接線ベクトルは S に接することになる．S 上の固定された点 P を通るさまざまな方向の S 上のすべての曲線を考えれば，それらの点 P における接線ベクトルは，一般に P において S に接する 1 つの平面を構成するであろう．この平面は P における S の**接平面**とよばれる (図 3.51)．P を通り接平面に垂直な直線を P における曲面 S の**法線**といい，法線に平行なベクトルを**法線ベクトル**という．式 (10) を t について微分し連鎖法則を利用すると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = (\mathrm{grad}\, f)\cdot\boldsymbol{r}' = 0. \tag{11}$$

これは $\mathrm{grad}\, f$ と接平面上のすべてのベクトルが直交することを意味する (図 3.51)．以上の結果を定理の形にまとめておく．

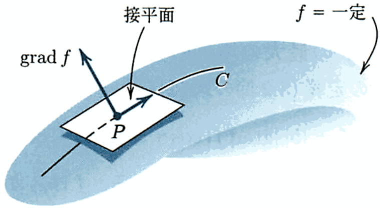


図 3.51　曲面の法線ベクトルとしての勾配

定理 2（曲面の法線としての勾配）　曲面 $S: f(x,y,z)=c$ $(=$ 一定$)$ を表すスカラー関数 f は微分可能であるとする．S 上の点 P における f の勾配が零ベクトルでなければ，それは P における S の法線ベクトルである．

［注意］　c の値を特定したときに式 (8) が与える曲面をスカラー関数 f の**等位面**という．c の値を変えればそれに応じて等位面も変わる．

例 2　曲面の法線ベクトルとしての勾配　直円錐 $z^2=4(x^2+y^2)$ の点 $P:(1,0,2)$ における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

［解］　この円錐はスカラー関数 $f(x,y,z)=4(x^2+y^2)-z^2$ の等位面 $f=0$ とみなすことができる．すると，

$$\operatorname{grad} f = 8x\boldsymbol{i}+8y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k},$$

$$\text{点 } P \text{ では } \operatorname{grad} f = 8\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$$

となる．ゆえに定理 2 により，P における円錐の 1 つの単位法線ベクトルは，

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\operatorname{grad} f=\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$$

(図 3.52)

であり，もう 1 つの単位ベクトルは $-\boldsymbol{n}$ である．◀

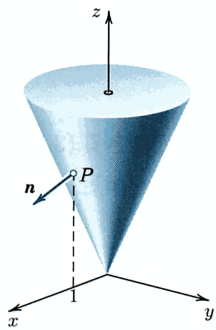


図 3.52　円錐と単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$

スカラー場の勾配とみなされるベクトル場（“ポテンシャル”）

本節の冒頭では，ある種のベクトル場にはスカラー場から導かれる利点があると述べた．このようなベクトル場は，スカラー関数 $f(P)$ の勾配として得られるベクトル関数 $\boldsymbol{v}(P)=\operatorname{grad} f(P)$ によって与えられる．この関数 $f(P)$ は $\boldsymbol{v}(P)$ のポテンシャル関数または単に**ポテンシャル**とよばれる．ポテンシャルに対応するベクトル場は**保存場**であるといわれる．たとえば重力場の場合には，物体を場内のある点 P からほかの点に動かしたあとふたたび P に戻しても，エネルギーは消失も発生もせずに保存されるからである．この問題は 4.2

節で改めて論じる．ここでは，ベクトル場の解析法を直観的に理解するために，1つの重要な応用例を考えよう．

例 3 重力場，ラプラスの方程式 3.4 節の例 3 で述べたように，2 つの粒子の間の引力はニュートンの万有引力 (重力) の法則によって

$$\boldsymbol{p} = -\frac{c}{r^3}\boldsymbol{r} = -c\left(\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}\right) \tag{12}$$

と表される．ただし，r は $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ と $P : (x, y, z)$ に位置する 2 粒子間の距離であって，

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

と書ける．いま，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-2(x-x_0)}{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} = -\frac{x-x_0}{r^3}, \tag{13a}$$

同様に，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y-y_0}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z-z_0}{r^3} \tag{13b}$$

であることに注目すれば，$\boldsymbol{p}$ はスカラー関数

$$f(x, y, z) = \frac{c}{r} \qquad (r > 0)$$

の勾配であることがわかる．すなわち f は重力場のポテンシャルである (定数 k を加えた $f + k$ もまたポテンシャルである)．

さらに，f は物理学に現れるもっとも重要な偏微分方程式，いわゆる**ラプラス**[15]**の方程式**

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0} \tag{14}$$

を満足する．実際，式 (13) を微分した結果は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}$$

であり，これらの 3 つの式の右辺の和は $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ により 0 になる．

式 (14) の左辺の表式は f の**ラプラシアン**とよばれ，$\nabla^2 f$ あるいは Δf と記される．

15) Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827)，偉大なフランスの数学者．パリ大学の教授であった．彼はポテンシャル論の基礎をつくり，天体力学，天文学一般，特殊関数，確率論に重要な貢献をした．Napoléon Bonaparte は 1 年間だけであるが彼の学生であった．Laplace の興味ある政治活動については付録 1 の [2] を参照せよ．

微分演算子

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{15}$$

(“ナブラ 2 乗” または “デルタ” と読む) を**ラプラスの演算子**という．この演算子を用いると，式 (14) は

$$\nabla^2 f = 0$$

と書ける．

結論はつぎのようになる．任意の質量の分布によってつくられる力の場は，スカラー関数 f の勾配であるベクトル関数として表される．そして，f は質量の存在しない任意の空間領域において式 (14) を満たす．

物理学ではニュートンの引力の法則と同じ形の別の法則もある．たとえば静電気学において，異符号 (または同符号) の電荷 Q_1, Q_2 をもつ 2 粒子間の引力 (または斥力) は

$$\boldsymbol{p} = \frac{k}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad \text{(クーロン[16]の法則)}$$

で与えられる．ここで $k = Q_1Q_2/4\pi\epsilon$ であって，ϵ は誘電率である．したがって，$\boldsymbol{p}$ はポテンシャル $f = -k/r$ の勾配であり，f は $r > 0$ のとき式 (14) を満足する．

ラプラス方程式については第 3 巻 3 章と第 4 巻 5 章でくわしく説明する． ◀

❖❖❖❖❖ 問題 3.9 ❖❖❖❖❖

勾配の利用

静電気力 静電界 $f(x, y, z)$ の力は勾配 $\text{grad}\, f$ の方向を向いている．$\text{grad}\, f$ およびその P における値を求めよ．グラフを描け．

1. $x^2 - y^2$, $P : (-1, 3)$
2. xy, $P : (1, 1)$
3. $\ln(x^2 + y^2)$, $P : (2, 0)$
4. $x^2 + 9y^2$, $P : (-2, 2)$
5. $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $P : (2, 1, 3)$
6. $e^x \sin y$, $P : (\ln 2, \pi/4)$

熱流 温度場における熱流は温度 T の最大の減少の方向に起こる．この方向を表す一般式を導き，与えられた点 P における方向を定めよ．

7. $z/(x^2 + y^2)$, $P : (0, 1, 2)$
8. $\sin(x + z)$, $P : (\pi/8, 1, \pi/8)$
9. $\cos x \cosh y$, $P : (\pi/2, 1)$
10. $\arctan(y/x)$, $P : (3, 4)$
11. x/y, $P : (8, -1)$
12. $e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$, $P : (1, 1)$

13. (勾配) 2 点 P, Q において，$|\text{grad}\, f(P)| > |\text{grad}\, f(Q)| > 0$ となるのはどんなスカラー場か．

14. (地形) ある山の海抜高度は $z(x, y) = 1500 - 3x^2 - 5y^2$ [m] で表される．点 $P : (-0.2, 0.1)$ において上り坂がもっとも急になるのはどの方向か．

曲線と曲面の法線 勾配を用いて，つぎの曲線または曲面の与えられた点における単位法線ベクトルを求めよ．

---

16) Charles Augustin de Coulomb (1736–1806)，フランスの物理学者，工学者．精密な実験によりクーロンの法則を導いた．

15. $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$,　$P:(2,2)$
16. $y = 1 - x^2$,　$P:(1,0)$
17. $x^2 + y^2 = 25$,　$P:(3,4)$
18. $ax + by + cz + d = 0$,　P は任意
19. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,　$P:(6,8,10)$
20. $x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$,　$P:(2,2,3)$

ポテンシャル場　ポテンシャル f はベクトル場 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} f$ よりも扱いやすい．与えられた $\boldsymbol{v}$ に対して f が存在するかどうかを示し，存在する場合には f を定めよ．

21. $[2x, 4y, 8z]$
22. $[yz, xz, xy]$
23. $[xy, 2xy, 0]$
24. $[ye^x, e^x, 1]$
25. $[y/z, x/z, -xy/z^2]$
26. $(x^2 + y^2)^{-1}[x, y]$

27. **［CAS プロジェクト］ 等ポテンシャル線**　温度場 $T(x, y)$ が与えられたとき，等温線 (温度一定の曲線) を求め，熱流の方向を矢印で示せ．

(a)　$x^3 - 3xy^2$　　(b)　$\sin x \sinh y$　　(c)　$e^x \cos y$

28. **［プロジェクト］ 勾配とラプラシアンに関する有用な公式**　つぎの公式を証明し，それらの利点を示す 2 つの実例をあげて説明せよ．

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \qquad \nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$$
$$\nabla(f/g) = (1/g^2)(g\nabla f - f\nabla g), \qquad \nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$$

方向微分

点 P におけるスカラー関数 f の $\boldsymbol{a}$ の方向の方向微分係数を求めよ．

29. $f = x^2 + y^2$,　$P:(1,1)$,　$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$
30. $f = x - y$,　$P:(4,5)$,　$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
31. $f = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,　$P:(3,0,4)$,　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
32. $f = \ln(x^2 + y^2)$,　$P:(4,0)$,　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
33. $f = xyz$,　$P:(-1,1,3)$,　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$
34. $f = x^2 + 3y^2 + 4z^2$,　$P:(1,0,1)$,　$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
35. $f = e^x \cos y$,　$P:(2,\pi,0)$,　$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

3.10　ベクトル場の発散

ベクトル解析の工学や物理学における重要性は，勾配のほか発散，回転などの諸概念に負うところが大きい．勾配についてはすでに論じたので，本節では発散の議論にうつろう．回転はつぎの 3.11 節で扱うことにする．

x, y, z を空間のデカルト座標，$\boldsymbol{v}(x, y, z)$ を微分可能なベクトル関数，v_1, v_2, v_3 を $\boldsymbol{v}$ の成分とする．そのとき，関数

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{1}$$

は $\boldsymbol{v}$ の**発散**，または $\boldsymbol{v}$ で定義されるベクトル場の発散とよばれる．$\boldsymbol{v}$ の発散に対してよく使われる別の記号は $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ である．すなわち，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k})$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

ただし，内積における“積”$(\partial/\partial x)v_1$ などは $\partial v_1/\partial x$ のような偏導関数を意味するものとする．これは便利な表記法であるが，それ以上の意味があるわけではない．∇f が 3.9 節で定義されたベクトル $\operatorname{grad} f$ を意味するのに対して，$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ はスカラー $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ を意味することを注意したい．たとえば，

$$\boldsymbol{v} = 3xz\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - yz^2\boldsymbol{k} \quad \text{ならば} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 3z + 2x - 2yz$$

である．

発散が重要な物理的意味をもつことはあとで説明する．物理的ないし幾何的性質を特徴づける関数の値は，座標の選び方には無関係でなければならない．すなわち，これらの値は座標変換に関して不変でなければならない．

定理 1（発散の不変性） $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ の値は空間内の点（そしてもちろん $\boldsymbol{v}$）のみに依存し，式 (1) における座標の選び方には関係しない．したがって，ほかのデカルト座標 x^*, y^*, z^* および対応する $\boldsymbol{v}$ の成分 ${v_1}^*, {v_2}^*, {v_3}^*$ に関しては，関数 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ は

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial {v_1}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial {v_2}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial {v_3}^*}{\partial z^*} \tag{2}$$

で与えられる．

積分に基づいた証明が 4.8 節に示されている．現在は発散の意味を実感させるより実際的な課題に着目しよう．

$f(x, y, z)$ が 2 回微分可能なスカラー関数ならば，

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

および式 (1) を用いて

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

を得る．右辺は f のラプラシアン (3.9 節) である．ゆえに

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f} \tag{3}$$

となる．

例 1 重力 3.9 節の例 3 における引力 $\boldsymbol{p}$ はスカラー関数 $f(x, y, z) = c/r$ の勾配である．このスカラー関数はラプラスの方程式 $\nabla^2 f = 0$ を満たす．式 (3) によればこれは $\operatorname{div} \boldsymbol{p} = 0$ $(r > 0)$ を意味する． ◀

流体力学に関連したつぎの例はベクトル場の発散の物理的意味を示すものである．いわゆるガウスの発散定理による物理的解釈については 4.8 節を参照せよ．

例 2　圧縮性流体の運動：発散の物理的意味　領域 R における流体の運動について考察する．ただし，R には**湧き出し**や**吸い込み**，すなわち流体が生成したり消失したりする点は存在しないものとする．流体という概念には気体や蒸気も含まれる．狭義の流体，すなわち液体 (水や油など) の圧縮性は多くの場合に無視できるほど小さい．他方，気体や蒸気は大きい圧縮性をもち，その密度 ρ (= 単位体積あたりの質量) は空間座標 x, y, z に依存する (そして時間 t にも依存するだろう)．ここでは流体は圧縮性であると仮定する．

座標軸に平行な長さ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$[17]の辺をもつ小さい直方体 W (図 3.53) を通る流れを考える．W の体積は $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ である．この運動の速度ベクトルを $\boldsymbol{v} = [\,v_1, v_2, v_3\,] = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ と表す．

$$\boldsymbol{u} = \rho\boldsymbol{v} = [\,u_1, u_2, u_3\,] = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k} \qquad (4)$$

とおき，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ は x, y, z および t について連続微分可能な (連続な 1 階導関数をもつ) ベクトル関数と仮定する．境界面を横切る**流束**，すなわち単位時間に W から出る質量の損失を考えて，W に含まれる質量の変化を計算しよう．W の左の側面 (面積は $\Delta x \Delta z$) を通る流れを考えよう．$\boldsymbol{v}$ のうち v_1 と v_3 はその面に平行な成分であり，流れには寄与しない．したがって，短い時間 Δt の間にその面を通って入り込む流体の質量は

$$(\rho v_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t = (u_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t$$

で近似される．ここで，下付文字 y はこの式が左の側面に関するものであることを示す．同じ時間の間に反対側の面を通って W を出てゆく流体の質量は，近似的に $(u_2)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t$ である．ただし，下付文字 $y + \Delta y$ は図 3.53 では見えていない右の側面に関する式であることを意味する．それらの差

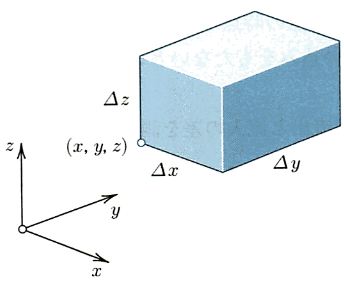


図 3.53　発散の物理的解釈

---

17)　小さい量を Δ で表記するのは一般的な慣習である．これはもちろんラプラシアンの記号 Δ (3.9 節の式 (15)) とは無関係である．

$$\Delta u_2 \Delta x \Delta z \Delta t = \frac{\Delta u_2}{\Delta y} \Delta V \Delta t \qquad (\Delta u_2 = (u_2)_{y+\Delta y} - (u_2)_y)$$

が質量の損失の近似値である．W のほかの 2 対の平行面についても同様の式を導くことができる．こうして得られる 3 つの式を加えると，時間 Δt の間の W 内の全質量損失は，近似的に

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z}\right) \Delta V \Delta t$$

となる．ここで，

$$\Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x, \qquad \Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z$$

である．この W 内における質量損失は密度の時間的変化によって起こるものであるから，

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V \Delta t$$

に等しいはずである．これらの 2 つの式を等置して $\Delta V \Delta t$ で割り，$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ を 0 に近づければ，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

すなわち

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0} \tag{5}$$

が得られる．この重要な関係式は圧縮性流体の質量保存の条件あるいは**連続の方程式**とよばれる．

流れが定常で時間によらないときには $\partial\rho/\partial t = 0$ であるから，連続の方程式は

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{6}$$

となる．流体が非圧縮性ならば密度 ρ は一定であり，式 (6) は

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0} \tag{7}$$

と変形される．この関係は非圧縮性の条件として知られている．これは与えられた体積要素における流出と流入が任意の時点でつり合っていることを表している．明らかに，流れが R で湧き出しや吸い込みをもたないという仮定が現在の議論に対しては本質的である．

大まかにいえば，発散は流出と流入の差を測っていると考えて記憶すればよい．◀

［注意］　次章 (4.7 節) で説明するガウスの発散定理は発散を含む積分定理である．

❖❖❖❖❖❖ 問題 3.10 ❖❖❖❖❖❖

発散の計算　与えられたベクトル関数 $\boldsymbol{v}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ を求めよ．

1. $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

2. $x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$

3. $e^x(\cos y\, \boldsymbol{i} + \sin y\, \boldsymbol{j})$

4. $v_1(y,z)\boldsymbol{i} + v_2(z,x)\boldsymbol{j} + v_3(x,y)\boldsymbol{k}$

5. $(x^2+y^2)^{-1}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$

6. $(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

7. $e^x\boldsymbol{i} + ye^{-x}\boldsymbol{j} + 2z\sinh x\, \boldsymbol{k}$

8. $xyz(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

9. ［**CAS プロジェクト**］ **発散の視覚化** 原点を中心とする正方形中の流体の流れのベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を図示せよ．発散が流出と流入の差であることを思い出せ．正方形の辺の付近の流れを見て，$\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ が正か負か 0 かわかるか．それから $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ を計算せよ．まず与えられた流れについて計算し，そのあとで自分で選んだ流れについて計算せよ．

(a) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}$　　(b) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$

(c) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$　　(d) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$

(e) $\boldsymbol{v} = -x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$　　(f) $\boldsymbol{v} = (x^2 + y^2)^{-1}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$

10. (**回転流**) 円筒容器中で回転する非圧縮性流体の速度ベクトル $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ のように表される．ただし，$\boldsymbol{w}$ は 3.3 節の例 6 で与えられた (一定の) 回転ベクトルである．$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ となることを示せ．これは例 2 からみて妥当といえるか．

11. (**流れ**) 速度ベクトル $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$ の流れを考える．この流れは非圧縮性であることを示せ．$t = 0$ において平面 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ で囲まれた立方体内にある粒子は，$t = 1$ において体積 1 を占めることを示せ．

12. (**流れ**) 速度 $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$ の流れを考える．個々の粒子は位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t) = c_1 e^t \boldsymbol{i} + c_2 \boldsymbol{j} + c_3 \boldsymbol{k}$ (c_1, c_2, c_3 は定数) をもち，流れは圧縮性であり，$t = 0$ で問題 11 の立方体を満たす粒子が $t = 1$ で占める体積は e であることを示せ．

13. ［**プロジェクト**］ **発散に関する有用な公式** つぎの公式を証明せよ．

(a) $\operatorname{div}(k\boldsymbol{v}) = k \operatorname{div}\boldsymbol{v}$　(k は定数)

(b) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = f \operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f$

(c) $\operatorname{div}(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$

(d) $\operatorname{div}(f\nabla g) - \operatorname{div}(g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

$f = e^{xyz}$ および $\boldsymbol{v} = ax\boldsymbol{i} + by\boldsymbol{j} + cz\boldsymbol{k}$ に対して (b) を確かめよ．(b) から問題 6 の答えを導け．$f = x^2 - y^2$ および $g = e^{x+y}$ に対して (c) を確かめよ．(a)–(d) が役にたつ読者自身の例をあげよ．

式 (3) によるラプラシアンの計算 式 (3) により $\nabla^2 f$ を求めよ．直接微分して確認せよ．式 (3) による計算のほうが簡単になる場合はどれか．(計算の詳細を示せ．)

14. $f = (x - y)/(x + y)$　　**15.** $f = 4x^2 + 9y^2 + z^2$

16. $f = e^{2x} \sin 2y$　　**17.** $f = xy/z$

18. $f = \cosh^2 x - \sinh^2 y$　　**19.** $f = \arctan(y/x)$

20. $f = z - \sqrt{x^2 + y^2}$

3.11 ベクトル場の回転

勾配 (3.9 節)，発散 (3.10 節) および回転はベクトル場に関連する基本的な概念である．ここでは回転を定義し説明しよう．

x, y, z を空間における右手系デカルト座標 (3.3 節) とし，

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$$

を微分可能なベクトル関数とする．そのとき，

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

はベクトル関数 $\boldsymbol{v}$ の**回転**，あるいは $\boldsymbol{v}$ によって定義されるベクトル場の回転とよばれる．左手系デカルト座標の場合には，3.3 節の式 (2^{**}) のあとの注意に従って式 (1) の行列式の前に負の符号がつく．

curl $\boldsymbol{v}$ のかわりに rot $\boldsymbol{v}$ という記号を使うことも多い．

例 1　**ベクトル関数の回転**　右手系のデカルト座標に関連して

$$\boldsymbol{v}=yz\boldsymbol{i}+3zx\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

とすると，式 (1) から

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & 3zx & z\end{vmatrix}=-3x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+(3z-z)\boldsymbol{k}=-3x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$$

が得られる．◀

回転は多くの応用で重要な役割を果たす．これを典型的な基本例によって説明しよう．(回転の役割と性質についてはさらに 4.9 節で論じることにする．)

例 2　**剛体の回転とベクトル関数の回転**　3.3 節の例 6 において，固定軸のまわりの剛体 B の回転が回転軸の方向の大きさ ω のベクトル $\boldsymbol{w}$ によって記述されることを知った．ここで $\omega\ (>0)$ は回転の角速度である．$\boldsymbol{w}$ の向きは，$\boldsymbol{w}$ の方向から見たときに時計まわりに回転するように見える向きとして定められる．3.3 節の式 (9) によれば，回転の速度場はつぎのような形で表される．

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$$

ただし，回転軸上に原点をもつデカルト座標系に関する剛体内の 1 点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とした．右手系のデカルト座標を

$$\boldsymbol{w}=\omega\boldsymbol{k}$$

となるように，すなわち回転軸が z 軸になるように選ぶ．すると 3.4 節の例 2 と同様に，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j},$$

したがって

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=2\omega\boldsymbol{k},$$

あるいは

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{w} \qquad (2)$$

が得られる．

ゆえに，剛体の回転の場合には，速度場の回転は剛体の回転軸の方向を向き，その大きさは回転の角速度 ω の 2 倍に等しい．

この結果はデカルト座標系の選び方に無関係であることに注意すべきである．◀

2 回連続微分可能なスカラー関数 f に対して

$$\boxed{\mathrm{curl}\,(\mathrm{grad}\,f) = \mathbf{0}} \qquad (\mathbf{3})$$

がなりたつ．これは直接計算により容易に検証できる．したがって，あるベクトル関数がスカラー関数の勾配であれば，その回転は零ベクトルである．ベクトル場の回転はその場における回転運動を特徴づけるものであるから，もっと簡単に，運動を記述する勾配の場は**非回転的**であるといってもよい．速度場以外の問題で非回転的な場が現れる場合には，通常それは**保存場**とよばれる(3.9 節)．

例 3　3.9 節の例 3 の重力場では $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ である．本節の例 2 の場は非回転的ではない．カップの中のコーヒーをかきまわしてできる速度場も同様である．◀

2 回連続微分可能なスカラー関数に対する式 (3) 以外の重要な公式として，

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}) = 0} \qquad (\mathbf{4})$$

をあげておく．この公式は，ベクトル関数の回転が回転運動と解釈され，発散が流束と解釈される (3.10 節の例 2) ことから自然に理解される．式 (4) の証明は回転と発散の定義を用いて容易に導くことができる．式中に現れる 6 つの項が対ごとに打ち消し合うからである．

回転は式 (1) では座標によって定義されているが，物理的ないし幾何的な意味をもつためには座標の選び方に依存してはならない．実際つぎの定理が成立する．

定理 1 **(回転の不変性)**　$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$ の大きさおよび方向は空間におけるデカルト座標系の選び方には無関係に定まる．

証明は付録 4 にある．

❖❖❖❖❖　問題 3.11　❖❖❖❖❖

1. ［論文プロジェクト］ **勾配，発散，回転の概要**　勾配，発散，回転，ラプラシアンに関する定義およびもっとも重要な事実と公式のリストをつくれ．このリストを使って数ページの小論文を書け．典型的な実例も含めよ．

回転の計算 $\boldsymbol{v}$ が右手系のデカルト座標系に関して下記のように与えられたとして，$\operatorname{curl} \boldsymbol{v}$ を求めよ．

2. $[2y, 5x, 0]$

3. $\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

4. $[v_1(x), v_2(y), v_3(z)]$

5. $(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

6. $[\sin y, \cos z, 0]$

7. $xyz\,(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

流体の運動 つぎのおのおのの場合に，流体の運動の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ が与えられている．流れは非回転的か．非圧縮性か．粒子の経路を見いだせ．(計算の詳細を示せ.)

8. $\boldsymbol{v} = [2y^2, 0, 0]$

9. $\boldsymbol{v} = x^3\boldsymbol{k}$

10. $\boldsymbol{v} = [\sec x, \operatorname{cosec} x, 0]$

11. $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$

12. $\boldsymbol{v} = [-\frac{1}{4}y, 4x, 0]$

13. $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$

14. **［プロジェクト］ 回転を含む有用な公式** 必要なだけの微分可能性を仮定して，つぎの公式を証明せよ．

(a) $\operatorname{curl}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \operatorname{curl}\boldsymbol{u} + \operatorname{curl}\boldsymbol{v}$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\boldsymbol{v}) = 0$

(c) $\operatorname{curl}(f\boldsymbol{v}) = (\operatorname{grad} f)\times\boldsymbol{v} + f\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$

(d) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \boldsymbol{0}$

(e) $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$

回転を含む表式の計算 右手系座標に関して $\boldsymbol{u} = y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$, $f = xyz$ とする．次式を計算せよ．問題 14 のいずれかの公式を使って結果を検算せよ．(計算の詳細を示せ.)

15. $\operatorname{curl}(f\boldsymbol{u})$

16. $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$, $\operatorname{curl}(f\boldsymbol{v})$

17. $\boldsymbol{u}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$

18. $\operatorname{curl}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$

19. $\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$

20. $\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$

3 章の復習

1. ベクトルとは，スカラーとは，ベクトル関数とは，ベクトル場とは，スカラー関数とは，スカラー場とは何か．例をあげよ．

2. 内積とは何か．それはどのような動機で定義されたのか．その別名は何か．

3. 外積とは何か．それはどのような動機で定義されたのか．

4. 直交とは何か．それはなぜ重要か．

5. 右手系座標および左手系座標とは何か．この区別はなぜ重要か．

6. 外積の 2 つの特異な性質を思い出せるか．

7. 内積はどんな場合に 0 になるか．外積はどうか．

8. 表式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ のうち誤りはどれか．

9. ベクトル関数の導関数はどのように定義されるか．それは力学や幾何学ではどんな意味をもつか．

10. ある物体の速さが一定で速度が変動することは可能か．

11. 方向微分係数について何か知っているか．

12. 勾配，発散，回転の定義を述べて，これらの非常に重要な概念の意味を説明せよ．

13. 必要なだけの微分可能性を仮定したとき，$f\,\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}\,\mathrm{curl}\,f$，$f\boldsymbol{v}$，$f\cdot\boldsymbol{v}$，$f\times\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}\times\mathrm{grad}\,f$，$\boldsymbol{v}\times\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$，$\mathrm{div}\,(f\boldsymbol{v})$，$\mathrm{curl}\,(f\boldsymbol{v})$ のうち意味がある表式はどれか．

ベクトルの和，スカラー倍，積

$\boldsymbol{a}=[3,1,-2]$，$\boldsymbol{b}=[-5,7,0]$，$\boldsymbol{c}=[4,-6,0]$，$\boldsymbol{d}=[9,1,14]$ として，つぎの諸量を求めよ．

14. $(4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot 6\boldsymbol{c}$

15. $3\boldsymbol{b}\times 6\boldsymbol{c}$,　$18\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$

16. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}$,　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}$

17. $(2\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ 3\boldsymbol{c})$,　$6(\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{c})$

18. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$,　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

19. $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d}$,　$\boldsymbol{d}\times(2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$

20. $(1/|\boldsymbol{a}|)\boldsymbol{a}$,　$(1/|\boldsymbol{c}|)\boldsymbol{c}$

21. $(\boldsymbol{d}\ \ 4\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{c})$,　$(\boldsymbol{c}\ \ 4\boldsymbol{d}\ \ \boldsymbol{a})$

22. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$,　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$

23. $(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})$

24. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,　$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

25. $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|$,　$\big||\boldsymbol{c}|-|\boldsymbol{d}|\big|$

26. **(角)**　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{d}$ のなす角を求めよ．

27. **(角)**　$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を求め，スケッチせよ．

28. **(合力)**　$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}=[2,-2,3]$，$\boldsymbol{u}=[-3,0,4]$ の合力が零ベクトルとなるように力 $\boldsymbol{p}$ を定めよ．

29. **(仕事)**　問題 28 の力 $\boldsymbol{q}$ が，$(1,0,0)$ から $(3,8,0)$ への変位の間にする仕事を求め，スケッチせよ．

30. **(成分)**　$\boldsymbol{a}=[4,0,2]$ の $\boldsymbol{b}=[3,3,0]$ の方向の成分を求めよ．

31. **(成分)**　$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向の成分が $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向の成分に等しくなるのはどんな場合か．

32. **(モーメント)**　力 $\boldsymbol{p}=[3,8,0]$ の作用線が $(1,3,0)$ を通るとき，$\boldsymbol{p}$ の $P:(2,1,0)$ に関するモーメントベクトル $\boldsymbol{m}$ を求め，スケッチせよ．

33. **(モーメント)**　力のモーメントが零ベクトルになるのはどんな場合か．

34. **(4 面体)**　頂点が $(2,1,8)$，$(3,2,9)$，$(2,1,4)$，$(3,3,10)$ である 4 面体の体積を求めよ．

35. **(平面)**　3 点 $(1,1,1)$，$(5,0,-5)$，$(3,2,0)$ を通る平面の方程式を見いだせ．

36. **(速度，加速度)**　ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)=[3\cos t,-2\sin t,t/2]$ で与えられる運動について，$P:(3/\sqrt{2},-2/\sqrt{2},\pi/8)$ における速度，速さ，加速度を求めよ．

勾配，発散，回転，ラプラシアン，方向微分係数　$f=xy-yz$，$\boldsymbol{v}=[2y,2z,4x+z]$，$\boldsymbol{w}=[3z^2,2x^2-y^2,y^2]$ としてつぎの諸量を求めよ．

37. $(2,0,7)$ における $\mathrm{grad}\,f$

38. $\mathrm{grad}\,f^2$,　$\mathrm{grad}\,f\times\mathrm{grad}\,f$

39. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$,　$\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}$

40. $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$,　$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{w}$

41. $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f)$

42. $\mathrm{div}\,[\mathrm{grad}\,(x^2 f)]$

43. $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{w})$

44. $(\mathrm{grad}\,f)\cdot\boldsymbol{v}$

45. $(2,3,1)$ における $D_{\boldsymbol{v}}f$

46. $(1,1,0)$ における $D_{\boldsymbol{w}}f$

47. $\mathrm{curl}\,(\mathrm{grad}\,f^2)$

48. $\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v})$,　$\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{w})$

49. $[(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}]\cdot\boldsymbol{w}$

50. $[(\mathrm{grad}\,f)\times\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{v}$

3 章のまとめ

すべてのベクトル

$$\boldsymbol{a} = [\,a_1, a_2, a_3\,] = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \qquad (3.1\ 節) \qquad (1)$$

は，

$$[\,a_1, a_2, a_3\,] + [\,b_1, b_2, b_3\,] = [\,a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\,] \qquad (2)$$

によって定義されるベクトルの和および

$$c[\,a_1, a_2, a_3\,] = [\,ca_1, ca_2, ca_3\,] \qquad (3.1\ 節) \qquad (3)$$

によって定義されるスカラー倍 (c はスカラー (実数)) に関連する実ベクトル空間を構成する．たとえば，2 つの力 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の合力は和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ に等しい．

2 つのベクトルの**内積**，**スカラー積**または**ドット積**は，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の間の角を γ として

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\gamma = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad (3.2\ 節) \qquad (4)$$

で定義される．これから $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**あるいは**大きさ** $|\boldsymbol{a}|$ を与える公式

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} \qquad (5)$$

および角 γ を与える公式が得られる．$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ ならば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するという．内積の例は力 $\boldsymbol{p}$ が変位 $\boldsymbol{d}$ においてなす仕事 $W = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}$ である．

外積，**ベクトル積**または**クロス積** $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，大きさが

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\gamma \qquad (3.3\ 節) \qquad (6)$$

に等しく，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}$ が互いに垂直で右手系の 3 つ組をつくるようなベクトルである．右手系座標に関する成分を用いれば，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3.3\ 節) \qquad (7)$$

と書ける．たとえば，力のモーメントや剛体の回転は外積で表される．

［注意］　外積は反可換すなわち $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ であり，結合法則も成立しないことに注意しよう．

もっとも重要な繰り返しの積はスカラー 3 重積

$$(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \qquad (8)$$

である．

3.4–3.11 節の主題は微分法のベクトル関数への拡張である．ベクトル関数が 1 つの変数 t のみに依存するときには

$$\boldsymbol{v}(t) = [\,v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)\,] = v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k} \qquad (9)$$

の形に表される．その導関数は

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \qquad (3.4\ 節) \qquad (10)$$

である．公式 (10) は微分法の周知の公式によく似ている．成分による表示では，

$$\boldsymbol{v}' = [\,v_1',\ v_2',\ v_3'\,] = v_1'\boldsymbol{i} + v_2'\boldsymbol{j} + v_3'\boldsymbol{k}$$

となる．微分法則としては (3.4 節)

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}', \qquad (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}'$$

などがある．

1 変数 t のベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ は空間曲線 C を表すために用いられる．$\boldsymbol{r}(t)$ は，区間 $a < t < b$ のそれぞれの $t = t_0$ に対して，位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t_0)$ の C 上の点を対応させる．導関数 $\boldsymbol{r}'(t)$ は C の**接線ベクトル** (3.5 節) である．**弧の長さ** s (3.5 節) をパラメータとして選べば，単位接線ベクトル $\boldsymbol{r}'(s)$ が得られる．このベクトルの導関数の大きさが**曲率** $\kappa(s) = |r''(s)|$ である (3.7 節)．

力学では，ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ は時刻 t における位置ベクトルであって，物体の運動の経路を表す．導関数 $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t)$ は**速度ベクトル**とよばれ，その大きさは速さであり，その導関数 $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{r}''(t)$ は**加速度ベクトル**である (3.6 節)．

空間におけるデカルト座標のベクトル関数，たとえば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\,(x,y,z) &= [\,v_1(x,y,z),\ v_2(x,y,z),\ v_3(x,y,z)\,]\\ &= v_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + v_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + v_3(x,y,z)\boldsymbol{k} \qquad (11)\end{aligned}$$

は $\boldsymbol{v}$ が定義される空間領域における**ベクトル場**を定義する．$\boldsymbol{v}$ はこの領域のすべての点 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ に対してベクトル $\boldsymbol{v}(P_0) = \boldsymbol{v}(x_0, y_0, z_0)$ を対応させる．$\boldsymbol{v}$ の偏導関数は成分を偏微分することによって得られる．たとえば，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial x},\ \frac{\partial v_2}{\partial x},\ \frac{\partial v_3}{\partial x}\right] = \frac{\partial v_1}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\boldsymbol{k}$$

などである．

多変数関数に関する連鎖法則や平均値定理などを述べた 3.8 節は 3.9–3.11 節の準備である．3.9 節ではスカラー関数 f の**勾配**

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right] \qquad (12)$$

と f の単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ の方向の**方向微分係数**

$$D_{\boldsymbol{b}} f = \frac{df}{ds} = \boldsymbol{b}\cdot\nabla f, \qquad (3.9\ 節) \qquad (13)$$

3.10 節ではベクトル関数 $\boldsymbol{v}$ の**発散**

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \qquad (14)$$

3.11 節では $\boldsymbol{v}$ の**回転**

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

について論じた．(左手系座標の場合には式 (15) の行列式の前に負の符号がつく．)

勾配，発散，回転に対する基本公式 (3.9–3.11 節) には，

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \qquad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{1}{g^2}\right)(g\nabla f - f\nabla g). \tag{16}$$

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = f\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f, \qquad \operatorname{div}(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g. \tag{17}$$

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f), \qquad \nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g. \tag{18}$$

$$\operatorname{curl}(f\boldsymbol{v}) = \nabla f\times\boldsymbol{v} + f\operatorname{curl}\boldsymbol{v}, \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{v}. \tag{19}$$

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{curl}\boldsymbol{v}) = 0 \tag{20}$$

などがある．

勾配，発散，回転 (およびラプラシアン) の曲線座標表示は付録 A3.3 に示してある．

4

ベクトルの積分法：積分定理

本章では，線積分および面積分を定義して，固体力学，流体力学，熱学などへの基礎工学的な応用をいくつか考えよう．線積分は定積分の自然な一般化であり，面積分は 2 重積分の一般化であることがわかるだろう．

線積分は 2 重積分 (4.4 節) や面積分 (4.9 節) に変換できるし，その逆もいえる．3 重積分と面積分も互いに変換可能である (4.7 節)．これらの変換は実際上きわめて重要である．対応するグリーン，ガウス，ストークスなどの諸公式 (4.4, 4.7, 4.9 節) は，理論的な問題 (たとえば 4.8 節のポテンシャル論) だけでなく，多くの応用問題で強力な手段を提供する．それらはまた，ベクトル関数の発散や回転の物理的な意味をいっそうよく理解させるものでもある．

本章を学ぶための予備知識：微積分学および 3 章．

短縮コースでは省略してもよい節：4.3, 4.5, 4.8 節．

参考書：付録 1.

問題の解答：付録 2.

4.1 線 積 分

線積分という概念は，微積分学でよく知られた定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

の簡単でしかも自然な一般化であるといえる．式 (1) においては被積分関数 $f(x)$ を x 軸に沿って a から b まで積分している．線積分の場合には被積分関数を空間 (または平面) における曲線 C に沿って積分する．したがって，“曲線積分” とよぶほうがよさそうに思われるが，標準的な用語は “線積分” である．

曲線 C をパラメータ表示 (3.5 節) を用いて

$$\boldsymbol{r}(t) = [\,x(t), y(t), z(t)\,] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad (a \leqq t \leqq b) \qquad (2)$$

と表そう．C を**積分の道**あるいは**積分路**，点 $A: \boldsymbol{r}(a)$ を**始点**，点 $B: \boldsymbol{r}(b)$ を**終点**とよぶ．この曲線 C は向きづけられている．t が増加する A から B への方向が C の正の方向である．図 4.1 (a) のように C の向きを矢印で示すことができる．図 4.1 (b) のように A と B が一致すれば閉曲線になる．

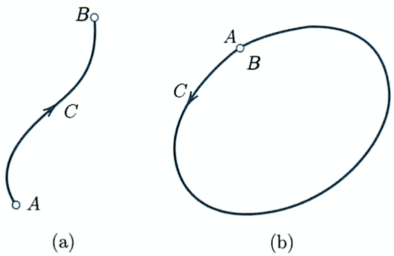


図 4.1　向きづけられた曲線

曲線 C がその上の各点でただ 1 つの接線をもち，接線の方向が曲線に沿って連続的に変化するとき，C は**滑らかな曲線**であるという．解析的には，C を表現するベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ が，C のすべての点で零ベクトルとは異なる連続な導関数 $\boldsymbol{r}'(t) = d\boldsymbol{r}/dt$ をもつことを意味する．

一般的仮定

本書においては，線積分のすべての積分路は**区分的に滑らか**である，すなわち有限個の滑らかな曲線からなると仮定する．

線積分の定義と計算

ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の曲線 C 上の**線積分**は，

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt \qquad (3)$$

によって定義される (内積については 3.2 節参照)．3.5 節と同様に成分を用いて $d\boldsymbol{r} = [\,dx,\ dy,\ dz\,]$ と表し，プライム記号 $' = d/dt$ を使えば，

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) \\ &= \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z')\,dt \end{aligned} \qquad (3')$$

と書きかえられる．式 (3) の積分路が閉曲線であれば，

$$\int_C \quad \text{のかわりに} \quad \oint_C$$

と記すこともある．式 (3) や式 (3′) は内積の形をとっているので，被積分関数はベクトルではなくスカラーであることを注意しておく．実際，$t = s$ (C の弧の長さ) のとき $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}/dt$ は $\boldsymbol{F}$ の接線成分を与える．

このような線積分 (3) は，力学では力 $\boldsymbol{F}$ が C 上の変位でする仕事 (詳細は実例で説明) として自然な形で現れる．それで式 (3) の線積分を**仕事積分**ということがある．ほかの形の定積分についても後に論じることにする．

式 (3) の右辺は t 軸上の区間 $a \leqq t \leqq b$ で正の向き (t の増大する向き) にとられた t の関数の定積分である．$\boldsymbol{F}$ が連続で C が区分的に滑らかなときには，$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'$ は区分的に連続であるから，この定積分は連続な $\boldsymbol{F}$ および区分的に滑らかな C に対して存在する．

例 1 **平面上の線積分の計算** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [-y, -xy] = -y\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j}$ で，C が図 4.2 の A から B までの円弧であるとして線積分 (3) の値を求めよ．

[解] C を

$$\boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t] = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi/2)$$

で表すと，$x(t) = \cos t$，$y(t) = \sin t$ であるから，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) &= -y(t)\boldsymbol{i} - x(t)y(t)\boldsymbol{j} \\ &= [-\sin t, -\cos t \sin t] = -\sin t\,\boldsymbol{i} - \cos t \sin t\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

となる．微分により，

$$\boldsymbol{r}'(t) = -\sin t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j}.$$

ゆえに，式 (3) から

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{\pi/2} (-\sin t\,\boldsymbol{i} - \cos t \sin t\,\boldsymbol{j}) \cdot (-\sin t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j})\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - \cos^2 t \sin t)\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521 \end{aligned}$$

が得られる．(付録 A3.1 の式 (10) を使い，第 2 項で $\cos t = u$ とおけ.) ◀

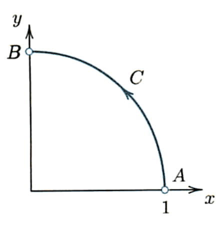


図 4.2 例 1

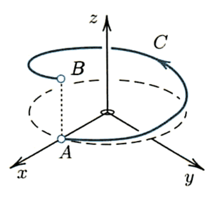


図 4.3 例 2

例 2　空間における線積分　空間曲線上の線積分も平面曲線の場合と実質的に同じである．これを示すために，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [z, x, y] = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ であって，C が

$$\boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t, 3t] = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi) \tag{4}$$

で表される円らせん (図 4.3) であるときに，線積分 (3) の値を定めよ．

［解］　式 (4) により $x(t) = \cos t$，$y(t) = \sin t$，$z(t) = 3t$ であるから，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = (3t\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \sin t\,\boldsymbol{k}) \cdot (-\sin t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}).$$

この内積は $3t(-\sin t) + \cos^2 t + 3\sin t$ となる．式 (3) の計算結果は

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} (-3t\sin t + \cos^2 t + 3\sin t)\,dt = 6\pi + \pi + 0 = 7\pi \approx 21.99$$

である．◀

ここで 2 つの重大な疑問が生じる．

1. 表示の選択　与えられた $\boldsymbol{F}$ および C に対する線積分 (3) の値は C の表示 (2) の選び方に依存するか．答えは否定的である．(定理 1 を参照せよ．)

2. 積分路の選択　始点 A から終点 B まで別の道を通って積分すれば，線積分の値は変化するか．答えは肯定的で線積分の値は一般には積分路に依存する．(例 3 を参照せよ．)

例 3　線積分の (同じ端点の) 積分路への依存性　ベクトル関数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [5z, xy, x^2z] = 5z\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + x^2z\boldsymbol{k}$$

を，図 4.4 のように同じ始点 A : (0,0,0) と同じ終点 B : (1,1,1) をもつ 2 つの積分路 (a), (b) に沿って積分したい．この線積分の値を計算せよ．

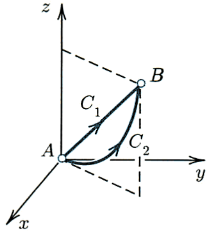


図 4.4　例 3

(a)　C_1 : 線分 $\boldsymbol{r}_1(t) = [t, t, t] = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

(b)　C_2 : 放物線の弧 $\boldsymbol{r}_2(t) = [t, t, t^2] = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

［解］　(a)　$\boldsymbol{r}_1$ を $\boldsymbol{F}$ に代入して $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1(t)) = [5t, t^2, t^3] = 5t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ を得る．さらに $\boldsymbol{r}_1' = [1, 1, 1] = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ である．したがって C_1 上の積分は

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1(t)) \cdot \boldsymbol{r}_1'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (5t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,dt \\ &= \int_0^1 (5t + t^2 + t^3)\,dt \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{37}{12}.\end{aligned}$$

(b) 同様に，$\boldsymbol{r}_2$ を $\boldsymbol{F}$ に代入して $\boldsymbol{r}_2'$ を計算すれば，C_2 上の積分として

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2(t))\cdot \boldsymbol{r}_2'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (5t^2+t^2+2t^5)\,dt \\ &= \frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{28}{12}.\end{aligned}$$

これらの 2 つの結果は端点が同じでも違っている．結論として，線積分 (3) の値は一般に $\boldsymbol{F}$ と両端点 A, B に依存するだけでなく，A から B まで積分する経路にも依存することがわかった．

それでは，線積分と積分路の独立性を保証する条件を見いだすことができるだろうか．これは物理的な応用にも関連する基礎的な問題である．答えは次節で示される． ◀

線積分 (3) の動機づけ：力による仕事

一定の力 $\boldsymbol{F}$ が直線に沿って変位 $\boldsymbol{d}$ を生じたときにする仕事は $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$ である (3.2 節の例 2)．したがって，変動する力 $\boldsymbol{F}$ が曲線 $C:\boldsymbol{r}(t)$ に沿って変位を生じたときにする仕事は，C の小さい弦に沿った変位の間にする仕事の総和の極限として定義するのがよいであろう．つぎに示すように，この定義は W を線積分 (3) で定義することと同等である．

区間 $a \leqq t \leqq b$ に点 $t_0(=a) < t_1 < \cdots < t_n(=b)$ を選ぼう．力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_m))$ が $\boldsymbol{r}(t_m)$ から $\boldsymbol{r}(t_{m+1})$ への (直線) 変位の間にする仕事は

$$\begin{aligned}\Delta W_m &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_m))\cdot[\boldsymbol{r}(t_{m+1})-\boldsymbol{r}(t_m)] \\ &\approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_m))\cdot\boldsymbol{r}'(t_m)\Delta t_m \qquad (\Delta t_m = t_{m+1}-t_m)\end{aligned}$$

と書ける．これらの n 個の仕事の和は $W_n=\Delta W_0+\cdots+\Delta W_{n-1}$ である．いま適当に点を選び n のおのおのの値に対して W_n を考える．n は任意であるが，n が無限に大きくなるにつれて Δt_m の最大値が 0 に近づくようにしておく．すると $n\to\infty$ のときの W_n の極限値は線積分 (3) に等しい．この積分は，$\boldsymbol{F}$ が連続で C が区分的に滑らかである (あるいは $\boldsymbol{r}'(t)$ が有限個の点を除いて連続である) という一般的な仮定のもとで存在する．

例 4 変動する力による仕事 例 1 の $\boldsymbol{F}$ が力ならば，$\boldsymbol{F}$ が 4 分円に沿って変位を生じたときにする仕事は 0.4521 である．単位は変位 (長さ) と力の単位に応じて適当に決まる．例 2，例 3 についても同様である． ◀

例 5 仕事と運動エネルギーの得失 $\boldsymbol{F}$ を力とすると線積分 (3) は仕事を与える．t を時間とすると $d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{v}$ は速度を表す．そのとき，線積分 (3) は

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{v}(t)\, dt \tag{5}$$

と書きかえられる．ニュートンの運動の第 2 法則 (力＝質量×加速度) によれば，

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{r}''(t) = m\boldsymbol{v}'(t).$$

ここで m は変位した物体の質量である．これを式 (5) に代入して (3.4 節の式 (11) を適用して)

$$W = \int_a^b m\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}\, dt = \int_a^b m \left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2}\right)' dt = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 \Big|_{t=a}^{t=b}$$

を得る．右辺の $m|\boldsymbol{v}|^2/2$ は運動エネルギーである．したがって，なされた仕事は運動エネルギーの増分に等しい．これは力学の 1 つの基本法則である． ◀

線積分のほかの形式

線積分

$$\int_C F_1\, dx, \qquad \int_C F_2\, dy, \qquad \int_C F_3\, dz \tag{6}$$

は，それぞれ $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i}, F_2\boldsymbol{j}, F_3\boldsymbol{k}$ に対応する線積分 (3) の特別な場合である．ほかの形式として

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\, dt = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\, dt \tag{7}$$

があるが，この定義もまた線積分 (3) の特別な場合とみなすことができる．式 (3) の左辺において $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i}$，$F_1 = f/(dx/dt)$ とおけば，式 (3′) のように $f = F_1 x'$ が得られるからである．式 (7) の具体的な計算は前の例と同様に行われる．

例 6 形式 (7) の線積分　$f = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ で C が例 2 の円らせんであるとき，線積分 (7) の値を求めよ．

［解］ $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\, \boldsymbol{i} + \sin t\, \boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$ により，C 上で

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = [\cos^2 t + \sin^2 t + (3t)^2]^2 = (1 + 9t^2)^2$$

であることがわかる．ゆえに，

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\, dt = \int_0^{2\pi} (1 + 9t^2)^2 dt = 2\pi + 6(2\pi)^3 + \frac{81}{5}(2\pi)^5 \approx 160135.$$ ◀

線積分 (3) の一般的性質

よく知られた積分の性質から線積分 (3) に関する公式が導かれる．

$$\int_C k\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = k \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad (k \text{ は定数}), \tag{8a}$$

$$\int_C (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r}, \tag{8b}$$

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (\text{図 } 4.5). \tag{8c}$$

ただし，公式 (8c) における積分路 C は C と同じ向きをもつ 2 つの弧 C_1, C_2 に分割されているとする (図 4.5)．公式 (8b) においては，C の向きは 3 つの積分ですべて同じにとる．C に沿った積分の向きが逆転したときには，積分値に -1 を掛けなければならない．

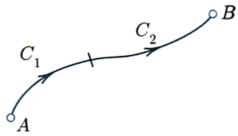


図 4.5　公式 (8c)

線積分 (3) が仕事などの物理量を表す場合には，与えられた曲線 C の表示をどのように選ぶかは，正の向きが変わらないかぎり本質的ではないはずである．これはつぎの定理が示すように真である．

定理 1 (向きを保存するパラメータの変換)　曲線 C に同じ正の向きを与えるような C の表示はまた線積分 (3) の同じ値を与える．

［証明］　線積分 (3) の曲線 C を表すパラメータ t を，関数 $t=\phi(t^*)$ によって新しいパラメータ t^* に変換しよう．ただし，この関数は正の導関数をもち，$a^* \leqq t^* \leqq b^*$ が $a \leqq t \leqq b$ に対応しているとする．$\boldsymbol{r}(\phi(t^*)) = \boldsymbol{r}^*(t^*)$ と書き連鎖法則を使えば，$dt^* = (dt^*/dt)\,dt$ により

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}^*)\cdot d\boldsymbol{r}^* &= \int_{a^*}^{b^*} \left[\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}^*(t^*)\big)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt^*}\right] dt^* \\ &= \int_{a^*}^{b^*} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(\phi(t^*))\big)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{dt^*}dt^* \\ &= \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

が得られる．◀

❖❖❖❖❖ 問題 4.1 ❖❖❖❖❖

線積分：力による仕事

つぎのデータに対して $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ．(もし $\boldsymbol{F}$ が力ならば，これは力が C に沿った変位においてなす仕事を与える．) 計算の詳細を示せ．

1. $\boldsymbol{F} = [y^2, -x^2]$，$C$ は $(0,0)$ から $(1,4)$ までの線分.

2. $\boldsymbol{F}$ は問題 1 と同じ，C は $(0,0)$ から $(1,4)$ までの放物線 $y = 4x^2$.

3. $\boldsymbol{F} = [xy, x^2y^2]$，$C$ は $(2,0)$ から $(0,2)$ までの $(0,0)$ を中心とする 4 分円.

4. $\boldsymbol{F}$ は問題 3 と同じ，C は $(2,0)$ から $(0,2)$ までの線分.

5. $\boldsymbol{F} = [(x-y)^2, (y-x)^2]$，$C : xy = 1\ (1 \leqq x \leqq 4)$.

6. $\boldsymbol{F} = [\exp(y^{2/3}), -\exp(x^{3/2})]$，$C$ は $(0,0)$ から $(1,1)$ までの 3/2 乗放物線 $y = x^{3/2}$.

7. $\boldsymbol{F} = [2z, x, -y]$，$C : \boldsymbol{r} = [\cos t, \sin t, 2t]$，$(1,0,0)$ から $(1,0,4\pi)$ まで.

8. $\boldsymbol{F} = [x-y,\ y-z,\ z-x]$，$C : \boldsymbol{r} = [2\cos t,\ t,\ 2\sin t]$，$(2,0,0)$ から $(2,2\pi,0)$ まで.

9. $\boldsymbol{F} = [e^x, e^{-y}, e^z]$，$C : \boldsymbol{r} = [t, t^2, t]$，$(0,0,0)$ から $(1,1,1)$ まで.

10. $\boldsymbol{F} = [\cosh x, \sinh y, e^z]$，$C : \boldsymbol{r} = [t, t^2, t^3]$，$(0,0,0)$ から $(2,4,8)$ まで.

11. ［論文プロジェクト］　**定積分の一般化としての線積分**　この課題について小論文を書け．幾何学的には，定積分は被積分関数の曲線と x 軸との間の面積を与える．対応する線積分の幾何学的解釈を述べよ．実例をあげよ．

12. ［プロジェクト］　**表示からの独立性と積分路への依存性**　$\boldsymbol{F} = [-x^2, xy]$ に対して積分 $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を考える.

(a)　**単一の積分路：複数の表示**　$\boldsymbol{r} = [\cos t, \sin t]\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ のときの積分値を求めよ．$t = -p$，$t = p^2$，および自分で選んだほかの 2 つのパラメータ変換を施しても積分値が不変であることを示せ.

(b)　**複数の積分路**　$C : y = x^n$，すなわち $\boldsymbol{r} = [t, t^n]\ (0 \leqq t \leqq 1)$ のときの積分値を $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して計算せよ．これらの無限に多い積分路が同じ端点をもつことに注意せよ.

(c)　**極限**　(b) で $n \to \infty$ としたときの極限値はいくらか.

(d)　自分で選んだ 2 つの積分路を例として，線積分が積分路に依存することを説明せよ.

弧の長さをパラメータとする積分 $\int_C f(\boldsymbol{r})\, ds$

f と C をつぎのように与えて積分を計算せよ．(詳細を示せ.)

13. $f = x^2 + y^2$，$C : y = 3x$，$(0,0)$ から $(2,6)$ まで.

14. $f = x^3 y$，$C : \boldsymbol{r} = [2\cos t, 2\sin t]\ (0 \leqq t \leqq \pi/2)$.

15. $f = x^2 + y^2 + z^2$，$C : \boldsymbol{r} = [\cos t, \sin t, 2t]\ (0 \leqq t \leqq 4\pi)$.

16. $f = \sqrt{2 + x^2 + 3y^2}$，$C : \boldsymbol{r} = [t, t, t^2]\ (0 \leqq t \leqq 3)$.

17. $f = 1 + y^2 + z^2$，$C : \boldsymbol{r} = [t, \cos t, \sin t]\ (0 \leqq t \leqq \pi)$.

18. $f = 1 - \sinh^2 x$，C は懸垂線 $\boldsymbol{r} = [t, \cosh t]\ (0 \leqq t \leqq 2)$.

19. $f = x^2 + (xy)^{1/3}$，C は内サイクロイド $\boldsymbol{r} = [\cos^3 t, \sin^3 t]\ (0 \leqq t \leqq \pi)$.

20. $f = \sqrt{16x^2 + 81y^2}$，$C : \boldsymbol{r} = [3\cos t, 2\sin t]\ (0 \leqq t \leqq \pi)$.

4.2 積分路に無関係な線積分

本節では前節と同様に線積分

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) \tag{1}$$

を考える．式 (1) においては，図 4.1 のように道 C に沿って A から B まで積分する．積分の値は，一般に端点 A および B に依存するだけでなく，積分の道 C にも依存する (4.1 節の例 3)．そこで，どんな道 C を通って A から B まで積分しても同じ値が得られるための条件，すなわち線積分が積分路に無関係になる条件は何かという問題が起こる．これは実際非常に重要な問題である．積分路に無関係という条件は，たとえば登山家が頂上をきわめるために必要な仕事が，登山ルートが短くてけわしいか長くてゆるやかかにかかわらず同じであることを意味する．あるいは，弾性ばねを伸ばすためになされた仕事は，開放すると全部戻ってくることを示している．もちろん，すべての力がこのような性質をもつわけではない．例としては，大きな渦巻きの中を泳ぐことを想像してみるとよい．

線積分 (1) は，空間の領域 D の中に任意の 2 点 A, B の対を与えたとき，A から出発して B に到達する D の中のすべての道に対して積分 (1) の値が同じになるならば，D において**道に無関係**であるといわれる．

積分が道に無関係かどうかを判定する実際的な基準をつぎに示す．(勾配については 3.9 節を参照せよ．)

定理 1 (積分路に対する独立性)　空間の領域 D において連続な F_1, F_2, F_3 をもつ線積分 (1) が D において道に無関係であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$ が D で定義されたある関数 f の勾配である，すなわち

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f, \tag{2}$$

あるいは成分で表して

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{2'}$$

がなりたつことである．

例 1　積分路に対する独立性　積分

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz)$$

が道に無関係であることを示し，C の始点が $A: (0,0,0)$，終点が $B: (2,2,2)$ のときの積分値を求めよ．

［解］ 視察により，

$$\boldsymbol{F} = [\,2x, 2y, 4z\,] = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} f \qquad (f = x^2 + y^2 + 2z^2)$$

であることがわかる．(もっと複雑な場合にはつぎの例 2 のように積分を実行すればよい.) したがって，定理 1 により積分路に対する独立性が導かれる．積分の値を定めるために，直線の積分路

$$C : \boldsymbol{r}(t) = [\,t, t, t\,] = t(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \qquad (0 \leqq t \leqq 2)$$

を選べば，$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ であって，

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}' = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 2t + 2t + 4t = 8t$$

となるので，

$$\int_C (2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz) = \int_0^2 \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'\,dt = \int_0^2 8t\,dt = 16$$

を得る．もっとよい解法も以下に示されている． ◀

［定理 1 の証明］ (a) D におけるある関数 f に対して式 (2) が成立するとしよう．C は D において任意の点 A から任意の点 B に至る任意の積分路であって，

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

で表されるものとする．そのとき，式 (2′)，連鎖法則 (3.8 節)，4.1 節の式 (3′) を使って，

$$\begin{aligned}\int_A^B (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) &= \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt \\ &= \int_a^b \frac{df}{dt}\,dt = f[\,x(t),\ y(t),\ z(t)\,]\Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

が得られる．これは積分値が C の両端点における f の値の差に等しいこと，したがって積分路 C によらないことを示す．

(b) 逆の証明，すなわち積分路に対する独立性からの式 (2) の誘導はもう少し複雑であり，付録 4 に与えられている． ◀

証明 (a) の最後の公式

$$\int_A^B (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = f(B) - f(A) \qquad (\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f) \qquad (\mathbf{3})$$

は微積分でよく知られた定積分の公式

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a) \qquad (G'(x) = g(x))$$

と類似している．公式 (3) は線積分が道によらない場合にはいつでも適用されるはずである．

3.9 節で f を $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$ のポテンシャルとよんだことを思い出せば，現在の議論は**ポテンシャル論**と密接に関連することがわかる．積分 (1) は $\boldsymbol{F}$ が D におけるあるポテンシャルの勾配とみなされるとき，そのときに限り D において道に無関係である．

例 2　積分路に対する独立性：ポテンシャルの決定　始点 $A:(0,1,2)$ から終点 $B:(1,-1,7)$ までの積分

$$I = \int_C (3x^2\,dx + 2yz\,dy + y^2\,dz)$$

を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{F}$ がポテンシャルをもつことを示し公式 (3) を適用せよ．

［解］　$\boldsymbol{F}$ がポテンシャルをもてば，

$$f_x = F_1 = 3x^2, \qquad f_y = F_2 = 2yz, \qquad f_z = F_3 = y^2$$

となるはずである．これらの条件が満たされることを示そう．積分と微分により，

$$f = x^3 + g(y,z), \qquad f_y = g_y = 2yz, \qquad g = y^2 z + h(z),$$
$$f_z = y^2 + h' = y^2, \qquad h' = 0, \qquad \text{たとえば } h = 0$$

である．これから $f(x,y,z) = x^3 + y^2 z$ が得られるため，公式 (3) より

$$I = f(1,-1,7) - f(0,1,2)$$
$$= 1 + 7 - (0 + 2) = 6$$

となる．◀

閉曲線上の積分および積分路に対する独立性

端点を共有する 2 つの経路が単一の閉曲線をつくることからただちにつぎの定理が導かれる．

定理 2（積分路に対する独立性）　積分 (1) は，D におけるすべての閉曲線上で値 0 をとるとき，またそのときに限って D における積分路に無関係である．

［証明］　積分 (1) が道に無関係ならば，図 4.6 のような A から B までの C_1 および C_2 上の積分は同じ値をとるはずである．C_1 と C_2 を合わせると 1 つの閉曲線 C がつくられる．まず A から C_1 に沿って B まで積分し，ついで B から C_2 に沿って逆向きに A まで積分する（A から B への積分を -1 倍する）．これらの 2 つの積分の和，すなわち閉曲線 C 上の積分は 0 に等しい．

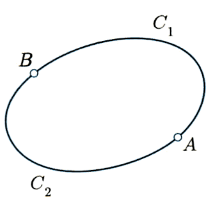


図 4.6　定理 2 の証明

逆に，D における任意の閉路 C 上の積分が 0 であると仮定する．A, B を D の中の任意の 2 点とし，C_1, C_2 を D の中で A から B に至る任意の 2 曲線とする．C_1 を逆向きにして C_2 と合わせると閉曲線 C が形成される．仮定により C 上の積分は 0 である．ゆえに，A から B までの C_1 と C_2 に沿った積分は相等しいはずである．これで定理は証明された．◀

仕事：保存系と非保存 (散逸) 系

前節で述べたように，力学では積分 (1) は物体の C 上の運動において力 $\boldsymbol{F}$ のなす仕事を表している．したがって，定理 2 は任意の閉路上の運動に対する仕事が 0 のとき，またそのときに限り仕事が運動の経路によらないことを示す．さらに，定理 1 は $\boldsymbol{F}$ があるポテンシャルの勾配であっても同じ結論が導かれることを意味する．このような場合には，$\boldsymbol{F}$ (または $\boldsymbol{F}$ で定義されるベクトル場) は**保存力** (**保存場**) であるといわれる．なぜならば，このときには力学的エネルギーが保存される，すなわち A から始まって A に戻る運動の仕事が 0 になるからである．静電界における電荷 (たとえば電子) の運動についても同様である．

物理的には，物体の運動エネルギーは運動によって物体が仕事をする能力と解釈される．物体が保存場の中で運動して最初の位置に戻ったとき，物体のもつ運動エネルギーは出発時と同じである．たとえば重力は保存力である．ボールを鉛直方向に上向きに投げたとき，ボールは (空気の抵抗を無視できれば) 投球時と同じ運動エネルギーをもって手もとに戻ってくるだろう．

摩擦と大気や水の抵抗などはつねに運動の方向とは逆向きにはたらき，系の全力学的エネルギーを減少させる (ふつう熱や周囲の媒質の力学的エネルギーに変換する) 傾向がある．物体の運動の間にこれらの力が無視できないほど大きくなれば，物体にはたらく力の合力はもはや保存力ではない．一般に物理系は，作用するすべての力が保存力であるとき**保存系**とよばれ，それ以外の場合には**非保存系**あるいは**散逸系**とよばれる．

完全性および積分路に対する独立性

線積分 (1) が道に無関係であるかどうかを判定する基準として，定理 1 では勾配を用い，定理 2 では閉曲線上の積分を用いた．第 3 の判定基準は，線積分 (1) の積分記号内の**微分形式**

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \tag{4}$$

の完全微分性である．この形式 (4) は，D においていたるところ微分可能な関数 $f(x, y, z)$ の微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

に等しいとき，すなわち

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = df$$

であるとき，D において**完全 (微分)** であるという．これらの公式を比較すれば，

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{5'}$$

が D の中のいたるところで成立するような微分可能な関数 $f(x, y, z)$ が存在するときに，またそのときに限って形式 (4) は完全であることがわかる．ベクトルの形ではこれらの 3 つの表式 (5′) を

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f \tag{5}$$

とまとめることができる．ゆえに定理 1 によれば，微分形式 (4) が連続な成分 F_1, F_2, F_3 をもち D において完全微分であるとき，またそのときに限り積分 (1) は D の中の道に無関係である．

有用な完全微分の判定基準が存在するためこの結果は実際上重要である．

領域 D におけるすべての閉曲線が D の外に出ずに連続的に D の中の任意の 1 点に縮められるならば，D は**単連結**であるという．たとえば，球や立方体の内部，有限個の点を除いた球の内部，2 つの同心球の間の領域などは単連結であるが，トーラス (ドーナツ型，4.6 節の図 4.30) や 1 つの空間対角線を除いた立方体の内部は単連結でない．

完全微分に基づく積分路からの独立性の判定基準はつぎのとおりである．

定理 3 (完全性および積分路に対する独立性)　線積分 (1)

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$$

における F_1, F_2, F_3 は，空間領域 D において連続で連続な 1 階偏導関数をもつものとする．

(a)　式 (1) が D の中の道に無関係で積分記号の中の微分形式 (4) が完全ならば，D において

$$\boxed{\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0},} \tag{6}$$

あるいは成分で書いて (3.11 節)

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \tag{6'}$$

がなりたつ．

(b)　式 (6′) が D で成立し D が単連結ならば，式 (1) は D の中の積分路に無関係である．

［証明］ (a) 式 (1) が D において積分路によらなければ，式 (2) により $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$ となるから，

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \operatorname{curl} (\operatorname{grad} f) = \boldsymbol{0}$$

である (3.11 節の式 (3))．これは式 (6) を意味する．

(b) 逆の証明には 4.9 節で与える“ストークスの定理”を利用すればよい． ◀

［注意］ 平面上の線積分

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy)$$

に対しては，$\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ はただ 1 つの成分をもち，式 (6′) もただ 1 つの関係式

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \tag{6''}$$

に帰着する．

例 3 完全性および積分路に対する独立性：ポテンシャルの決定 式 (6′) を用いて，

$$I = \int_C [2xyz^2\,dx + (x^2z^2 + z\cos yz)\,dy + (2x^2yz + y\cos yz)\,dz]$$

の積分記号内の微分形式が完全であって，I が任意の領域において積分路に無関係であることを示し，$A : (0, 0, 1)$ から $B : (1, \pi/4, 2)$ に至る I の値を求めよ．

［解］ 微分形式の完全性は式 (6′) からただちに確かめられる．実際，

$$(F_3)_y = 2x^2z + \cos yz - yz\sin yz = (F_2)_z,$$
$$(F_1)_z = 4xyz = (F_3)_x,$$
$$(F_2)_x = 2xz^2 = (F_1)_y$$

となる．f を求めるために，F_2 を y について積分した後 x, z について微分すると，

$$f = \int F_2\,dy = \int (x^2z^2 + z\cos yz)\,dy = x^2z^2y + \sin yz + g(x, z),$$
$$f_x = 2xz^2y + g_x = F_1 = 2xyz^2, \qquad g_x = 0, \qquad g = h(z),$$
$$f_z = 2x^2zy + y\cos yz + h' = F_3 = 2x^2yz + y\cos yz, \quad h' = 0,$$

したがって $h = 0$ とおけば

$$f(x, y, z) = x^2yz^2 + \sin yz.$$

これと式 (3) から

$$I = f(1, \pi/4, 2) - f(0, 0, 1) = \pi + \sin(\pi/2) - 0 = \pi + 1$$

を得る． ◀

領域 D が単連結であるという定理 3 の仮定は本質的であって省くことができない．これはつぎの例からわかる．

例 4　定理 3 における単連結の仮定　いま，

$$F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad F_3 = 0 \tag{7}$$

とする．微分によって，式 (6′) は原点を含まない xy 平面上の任意の領域，たとえば図 4.7 に示される領域 $D : \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{3}{2}$ において満足されていることがわかる．実際，F_1 と F_2 は z によらず $F_3 = 0$ であるから，式 (6′) の最初の 2 つの式はほとんど自明で，第 3 式も偏微分によりつぎのように確かめられる．

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

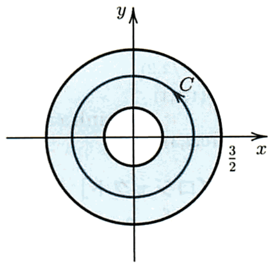


図 4.7　例 4

明らかに図 4.7 の D は単連結ではない．もしも積分

$$I = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy) = \int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

が D において道に無関係ならば，D の中の任意の閉曲線，たとえば円 $x^2+y^2=1$ の上で $I=0$ となるはずである．しかし，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおき，この円が $r=1$ で表されることに注意すれば，

$$x = \cos\theta, \qquad dx = -\sin\theta\,d\theta, \qquad y = \sin\theta, \qquad dy = \cos\theta\,d\theta.$$

よって，$-y\,dx + x\,dy = \sin^2\theta\,d\theta + \cos^2\theta\,d\theta = d\theta$ であるから，反時計まわりに円周に沿って 1 回積分した結果は

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1} = 2\pi$$

となる．D は単連結ではないので，定理 3 を適用することもできないし，I が D の中の道に無関係であると結論することもできない．

この例では，形式的に $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$，$f = \arctan(y/x)$ と書ける (確かめよ)．しかし，角 $\theta = \arctan(y/x)$ は通常の 1 価関数でないため，定理 1 は適用できない．◀

❖❖❖❖❖❖　問題 4.2　❖❖❖❖❖❖

1. ［論文プロジェクト］ **本節の主要な着想**　積分路依存性に関する本節の基本的な考え方をまとめたリストをつくれ．このリストに基づいて，すべての定義，定理の実際的な有用性に対する見解，各命題を説明する実例などを含む小論文を書け．証明は省いてよい．

道に無関係な積分

積分記号の中の微分形式が平面上 (問題 2–5) または空間内 (問題 6–9) で完全であることを示し，積分の値を計算せよ．(計算の詳細を示せ.)

2. $\displaystyle\int_{(0,\pi)}^{(3,\pi/2)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$　　**3.** $\displaystyle\int_{(-1,5)}^{(4,3)} (3z^2\,dx + 6xz\,dz)$

4. $\displaystyle\int_{(\pi/2,-\pi)}^{(\pi/4,0)} (\cos x \cos 2y\, dx - 2\sin x \sin 2y\, dy)$

5. $\displaystyle\int_{(3,3/2)}^{(4,1/2)} (2x \sin \pi y\, dx + \pi x^2 \cos \pi y\, dy)$

6. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(4,1,2)} (3y\, dx + 3x\, dy + 2z\, dz)$

7. $\displaystyle\int_{(0,-1,1)}^{(2,4,0)} e^{x-y+z^2} (dx - dy + 2z\, dz)$

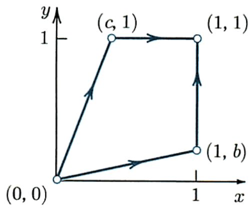
8. $\displaystyle\int_{(\pi,\pi/2,2)}^{(0,\pi,1)} (-z \sin xz\, dx + \cos y\, dy - x \sin xz\, dz)$

9. $\displaystyle\int_{(0,2,3)}^{(1,1,1)} (yz \sinh xz\, dx + \cosh xz\, dy + xy \sinh xz\, dz)$

10. ［プロジェクト］ **積分路依存性**

(a) $I = \displaystyle\int_C (x^2 y\, dx + 2xy^2\, dy)$ が xy 平面において積分路に依存することを示せ．

(b) 図のように，$(0,0)$ から直線に沿って $(1,b)$ $(0 \leqq b \leqq 1)$ まで，そのあと垂直に上がって $(1,1)$ まで積分せよ．I が最大になるのはどんな道か．その最大値はいくらか．



問題 10

(c) $(0,0)$ から直線に沿って $(c,1)$ $(0 \leqq c \leqq 1)$ まで，そして水平に進んで $(1,1)$ まで積分せよ．$c = 1$ に対する積分値は (b) で $b = 1$ としたときの値と同じか．どんな c の値に対して I が最大になるか．その最大値はいくらか．

道に無関係な積分と道に依存する積分

つぎの微分形式の積分が道に無関係かどうかを調べよ．道に無関係な場合には $(0,0,0)$ から (a,b,c) までの積分値を求めよ．(計算の詳細を述べよ．)

11. $2xy^2\, dx + 2x^2 y\, dy + dz$

12. $y\, dx - zx\, dy + z\, dz$

13. $\sinh xz(z\, dx - x\, dz)$

14. $yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$

15. $ye^{2z}\, dy - ze^y\, dz$

16. $3(x+y)^2(dx + 2\, dy) + dz$

17. $\cos(x + yz)(dx + z\, dy + y\, dz)$

18. $(y\, dx + 2x\, dy)e^{xy} + e^{2z}\, dz$

19. $e^z\, dx + 2y\, dy + xe^z\, dz$

20. $-2x\, dx + z \sinh y\, dy + \cosh y\, dz$

4.3 2重積分［選択］

微分積分学ですでに2重積分を学んだ読者は本節をとばしてつぎに進んでも差し支えない．(予備知識のない読者が自習できるように本節を設けたのである．)

4.1 節の定積分 (1) では，関数 $f(x)$ を x 軸上のある区間にわたって積分した．2 重積分の場合には，被積分関数とよばれる関数 $f(x, y)$ を xy 平面上の閉じた有界な[1]領域[2] R において積分する．ただし，領域 R の境界曲線は原則として各点でただ 1 つの接線をもつが，有限個の尖点 (3 角形や長方形の頂点など) をもっていてもよい．

2 重積分の定義は定積分の定義にきわめてよく似ている．領域 R を x 軸および y 軸に平行な直線を引いて分割する (図 4.8)．R の中にできる長方形に 1 から n までの番号をつける．それぞれの長方形の中に 1 つの点，たとえば k 番目の長方形の中に点 (x_k, y_k) を選び，和

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

をつくる．ただし，ΔA_k は k 番目の長方形の面積である．ここで正の整数 n の値ごとにまったく独立に和をとって n を増加させる．また，n を無限に大きくしたときに，長方形の最大の対角線の長さが 0 に近づくようにしておく．このようにして実数列 $J_{n_1}, J_{n_2}, \cdots$ を得る．$f(x, y)$ が R において連続で，R が有限個の滑らかな曲線 (4.1 節) に囲まれていると仮定すれば，この数列は収束し，その極限値は分割の仕方や長方形の中の点 (x_k, y_k) の選び方には無関係であることが示される[3]．この極限値は領域 R における $f(x, y)$ の **2 重積分**とよばれ，

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy \quad \text{または} \quad \iint_R f(x, y)\, dA$$

と記される．

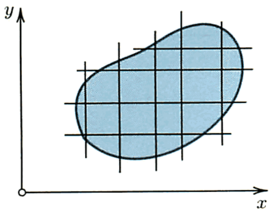


図 4.8　R の分割

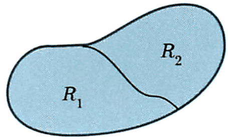


図 4.9　公式 (1)

1)　"閉じた" とは境界もまたその領域の部分になっていることを意味し，"有界な" とは領域が十分大きな半径の円に含まれることを意味する．

2)　(訳注)　3.8 節の脚注 14) では領域 (domain) D を連結開集合として定義し，ここでは領域 (region) R を境界を含めた閉包の意味に用いている．3.10 節の例 2 では定義せずに領域 (region) R という用語が使われている．第 4 巻 1.3 節の定義によれば，domain にその境界点をいくつかまたは全部つけ加えたものが region である．今後は domain, region を区別せずに領域と訳し，とくに閉包であることを明示する必要がある場合には閉領域と訳すことにする．

3)　付録 1 の [5] を参照せよ．

2 重積分は定積分と非常によく似た性質をもっている．実際，領域 R で定義された任意の連続関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ に対して，

$$\iint_R kf\,dxdy = k\iint_R f\,dxdy \qquad (k \text{ は定数}), \tag{1a}$$

$$\iint_R (f+g)\,dxdy = \iint_R f\,dxdy + \iint_R g\,dxdy, \tag{1b}$$

$$\iint_R f\,dxdy = \iint_{R_1} f\,dxdy + \iint_{R_2} f\,dxdy \qquad (\text{図 4.9}) \tag{1c}$$

がなりたつ．さらに，R の面積を A として

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)\,A \tag{2}$$

を満足する R の中の点 (x_0,y_0) が少なくとも 1 つ存在する．これが 2 重積分に対する**平均値定理**である．

2 重積分の計算

領域 R における 2 重積分は 2 回続けて積分することによって計算される．R が

$$a \leqq x \leqq b, \qquad g(x) \leqq y \leqq h(x) \qquad (\text{図 4.10})$$

の形の不等式によって記述されると仮定する．$y=g(x)$ および $y=h(x)$ は R の境界を表す．このとき，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right] dx \tag{3}$$

である．最初に括弧内の積分

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

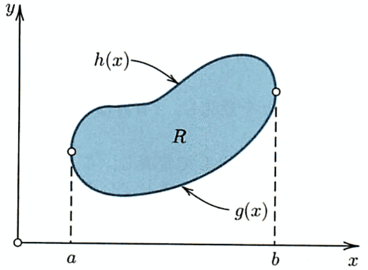


図 4.10　2 重積分の計算

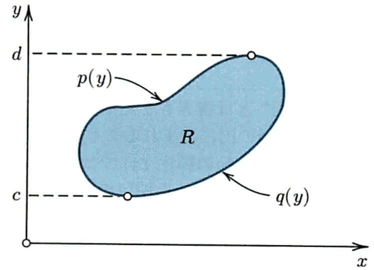


図 4.11　2 重積分の計算

を行う．この積分では x を固定し定数とみなす．積分の結果は x のある関数，たとえば $F(x)$ となるだろう．$F(x)$ を x について a から b まで積分すると，式 (3) の 2 重積分の値が得られる．

同様に，R が不等式

$$c \leqq y \leqq d, \qquad p(y) \leqq x \leqq q(y) \qquad (\text{図 } 4.11)$$

で表される場合には，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\right] dy \tag{4}$$

と書ける．今度は，まず x について (y を一定として) 積分し，得られた y の関数を c から d まで積分するという順序である．

R 自身はこのような不等式では表されないけれども，同様な不等式で表される有限個の部分に分割されるときには，各部分で別々に $f(x,y)$ を積分してその結果を加えれば，領域 R における $f(x,y)$ の 2 重積分の値を求めることができる．

2 重積分の応用

2 重積分には幾何学的および物理学的な応用が多い．たとえば，xy 平面上の領域 R の**面積** A は 2 重積分

$$A = \iint_R dxdy$$

で与えられる．また，曲面 $z = f(x,y)\ (> 0)$ の下で xy 平面の領域 R の上の空間領域 (図 4.12) の体積は

$$V = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

である．なぜならば，本節のはじめに与えた J_n の $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ という項は，

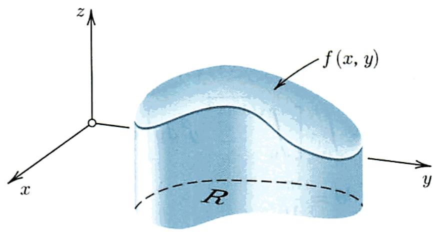


図 4.12　体積としての 2 重積分

底面積が ΔA_k で高さが $f(x_k, y_k)$ である直方体の体積を表すからである．

$f(x,y)$ が xy 平面に分布した質量の密度 (単位面積あたりの質量) ならば，R における全質量 M は

$$M = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

である．R における質量分布の**重心**の座標 $\overline{x}, \overline{y}$ は

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dxdy, \qquad \overline{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dxdy$$

で与えられる．R における質量分布の x 軸，y 軸に関する**慣性モーメント** I_x, I_y はそれぞれ

$$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)\,dxdy, \qquad I_y = \iint_R x^2 f(x,y)\,dxdy$$

であり，原点に関する**極慣性モーメント**は

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2+y^2) f(x,y)\,dxdy$$

である．

例 1　**重心，慣性モーメント**　4 分円板 $R: 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$, $0 \leqq x \leqq 1$ (図 4.13) における質量の密度 $f(x,y)$ を 1 として，重心および慣性モーメント I_x, I_y, I_0 を求めよ．

［解］ R の全質量は

$$\begin{aligned} M &= \iint_R dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\right] dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4} \qquad (x = \sin\theta) \end{aligned}$$

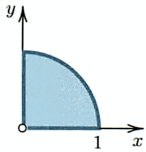


図 4.13　例 1

と計算される．これは R の面積に等しい．重心の座標は

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{4}{\pi}\iint_R x\,dxdy = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right] dx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= -\frac{4}{\pi}\int_1^0 z^2 dz = \frac{4}{3\pi} \qquad (\sqrt{1-x^2} = z) \end{aligned}$$

であり，対称性から $\overline{y} = \overline{x}$ が得られる．さらに，

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_R y^2\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy\right] dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{\pi}{16}, \\ I_y &= \frac{\pi}{16}, \qquad I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{8} \approx 0.3927. \end{aligned}$$

このような積分の計算は適当な変数変換を使えばもっと簡単になる．つぎに 2 重積分における変数変換について述べよう． ◀

2 重積分における変数変換，ヤコビ行列式

実際問題ではしばしば 2 重積分の積分変数を変換する必要がある．微積分で知られているように，積分の変数を x から u に変えたときの定積分の公式は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))\frac{dx}{du}\,du \tag{5}$$

で与えられる．ここで，関数 $x = x(u)$ はある区間 $\alpha \leqq u \leqq \beta$ において連続でしかも連続な導関数をもつものとする．しかも $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ (あるいは $x(\alpha) = b$, $x(\beta) = a$) であって，u が α と β の間を変化するにつれて $x(u)$ が a と b の間を変化するようにとる．

積分変数を x, y から u, v に変換したときの 2 重積分の変換公式は，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \tag{6}$$

である．すなわち被積分関数は u と v で表され，$dxdy$ は $dudv$ と**ヤコビ**[4)]**行列式 (ヤコビアン)**

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7}$$

の絶対値との積でおきかえられる．ただし，変換を表す関数

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v)$$

は uv 平面上のある領域 R^* において連続であり，かつ連続な偏導関数をもつと仮定する．また，R^* に属するすべての点 (u,v) に対応する点 (x,y) が R に存在し，逆に R に属するすべての点 (x,y) に対して R^* のただ 1 つの点 (u,v) が対応すると仮定する．さらに，ヤコビ行列式 J は全領域 R^* において正であるかあるいは全領域 R^* において負であるかのいずれかとする．証明については付録 1 の [5] を参照せよ．

実際上とくに重要な変換は**極座標**への変換である．極座標 r, θ は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくことによって導入される．すると，

---

4) ドイツの数学者 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) にちなんで名づけられた．彼は楕円関数，偏微分方程式，力学などへの貢献で知られている．

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

であるから，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta. \qquad (8)$$

ここで，R^* は xy 平面における R に対応する $r\theta$ 平面の領域である．

例 2 **極座標による 2 重積分**　公式 (8) を適用すると，例 1 における I_x は

$$I_x=\iint_R y^2\,dxdy=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\,r\,drd\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{16}$$

となる． ◀

例 3 **2 重積分における変数変換**　図 4.14 の正方形 R 上の 2 重積分

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ．

［解］ R の形から想定される変換は $x+y=u$，$x-y=v$ である．この変換に対しては $x=(u+v)/2$，$y=(u-v)/2$ であり，ヤコビ行列式は

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

となる．R は正方形 $0\leqq u\leqq 2$，$0\leqq v\leqq 2$ に対応するので，

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{2}(u^2+v^2)\frac{1}{2}\,dudv=\frac{8}{3}$$

が得られる． ◀

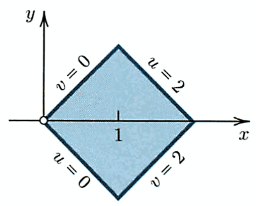


図 4.14　例 3 の領域

2 重積分の復習はこれで終わる．2 重積分は次節以降に必要となるであろう．

❖❖❖❖❖ 問題 4.3 ❖❖❖❖❖

2 重積分

つぎの積分領域を図示し積分値を計算せよ．(計算の詳細を示せ.)

1. $\displaystyle\int_0^2\int_0^4 (x^2+y^2)\,dxdy$　　**2.** 問題 1 で積分の順序が逆の場合

3. $\displaystyle\int_0^3\int_{-y}^{y} (x^2+y^2)\,dxdy$　　**4.** 問題 3 で積分の順序が逆の場合

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dxdy$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} xy\,dydx$

7. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{y} \sinh(x+y)\,dxdy$

8. 問題 7 で積分の順序が逆の場合

9. $\displaystyle\int_1^{5}\int_0^{x^2} (1+2x)e^{x+y}\,dydx$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos y} x^2\sin y\,dxdy$

応　用

体積　空間におけるつぎの領域の体積を求めよ．

11. 曲面 $z=4x^2+9y^2$ の下で頂点 $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(3,2,0)$, $(0,2,0)$ の長方形の上の領域.

12. 座標面と曲面 $y=1-x^2$, $z=1-x^2$ に囲まれた第 1 象限の領域.

13. 平面 $y=0$, $z=0$, $x=y$ によって円柱 $x^2+z^2=a^2$ の内部から切りとられた第 1 象限の領域.

重心　つぎの領域 R における密度 $f(x,y)=1$ の質量分布の重心の座標 $\overline{x},\overline{y}$ を求めよ．

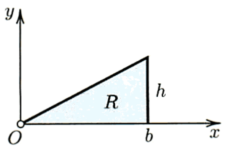
14. 頂点 $(0,0)$, $(b,0)$, (b,h) の 3 角形.

15. 第 1 象限の領域 $x^2+y^2\leqq a^2$.

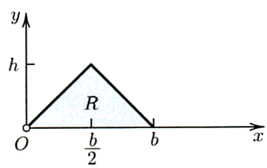
16. 問題 15 の結果を極座標を用いて確かめよ．

慣性モーメント　問題 17–20 の図に示される領域 R における密度 $f(x,y)=1$ の質量分布の慣性モーメント I_x, I_y, I_0 を求めよ．(このような図形は工業ハンドブック類に記載されていて，技術者の実用に役だちそうな問題である.)

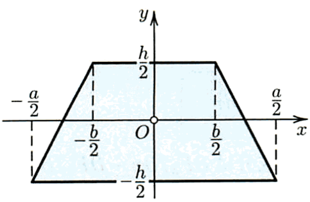
17.



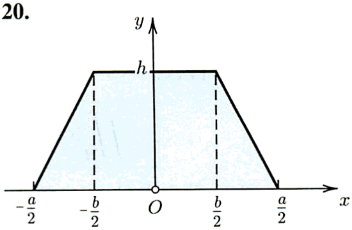
18.



19.



20.



4.4 平面におけるグリーンの定理

平面領域における 2 重積分はその領域の境界上の線積分に変換されるし，またその逆も成立する．この変換は積分の計算を容易にするために役だつため，実用的な興味が大きい．理論的にも，ある型の積分をほかの型の積分に帰着させるのに有用である．この変換はつぎの定理に従って実行される．

定理 1 (平面におけるグリーン[5)]の定理 (2 重積分と線積分との変換))

R を xy 平面における有界な閉領域 (4.3 節) とし，その境界 C は有限個の滑らかな曲線 (4.1 節) からなっているとする．$F_1(x,y)$ および $F_2(x,y)$ は，R を含むある領域のいたるところで連続であり，かつ連続な偏導関数 $\partial F_1/\partial y$ および $\partial F_2/\partial x$ をもつ関数としよう．そのとき，

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy) \tag{1}$$

がなりたつ．右辺の積分は R の全境界 C に沿って行い，積分方向に進んでゆくときに R が左側にあるように向きを決める (図 4.15).

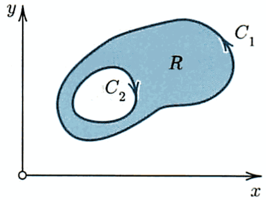


図 4.15　境界 C が 2 つの部分からなる領域 R．C_1 は反時計まわりであるが，C_2 は時計まわりである．

［注意］　公式 (1) は，ベクトル $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2] = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j}$ の回転を用いて

$$\iint_R (\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k}\,dxdy = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{1'}$$

と書ける．3.11 節の式 (1) によれば，$\operatorname{curl}\boldsymbol{F}$ の第 3 成分は $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y$ となるからである．

---

5) George Green (1793–1841)，イギリスの数学者．はじめはパン職人であったが，独学で数学を修得し，死去時はケンブリッジ大学カイウス・カレッジの研究員であった．彼の仕事は電磁気学に関連したポテンシャル論，振動，波動，弾性論などに及んでいるが，生前はイングランドにおいてさえほとんど知られていなかった．

例 1　平面におけるグリーンの定理の検証　平面におけるグリーンの定理は今後の理論展開において非常に重要である．証明の前にグリーンの定理に慣れておくために，$F_1 = y^2 - 7y$，$F_2 = 2xy + 2x$ で C が円 $x^2 + y^2 = 1$ の場合について検証してみよう．

［解］　円板 R の面積は π であるから，式 (1) の左辺は

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R [(2y+2) - (2y-7)]\, dxdy = 9 \iint_R dxdy = 9\pi$$

となる．式 (1) の右辺の C (向きは反時計まわり) を

$$\boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t], \qquad \boldsymbol{r}'(t) = [-\sin t, \cos t]$$

によって表す．C 上では

$$F_1 = \sin^2 t - 7\sin t, \qquad F_2 = 2\cos t \sin t + 2\cos t$$

と書ける．ゆえに式 (1) の右辺の積分はつぎのようになる．

$$\oint_C (F_1 x' + F_2 y')\, dt = \int_0^{2\pi} [(\sin^2 t - 7\sin t)(-\sin t) + 2(\cos t \sin t + \cos t)(\cos t)]\, dt$$
$$= 0 + 7\pi + 0 + 2\pi = 9\pi.$$

これで平面のグリーンの定理が確認された．◀

［グリーンの定理の証明］　まず

$$a \leqq x \leqq b, \qquad u(x) \leqq y \leqq v(x) \qquad (\text{図 } 4.16)$$

および

$$c \leqq y \leqq d, \qquad p(y) \leqq x \leqq q(y) \qquad (\text{図 } 4.17)$$

で表される特別な領域 R に対してグリーンの定理を証明する．4.3 節の式 (3) を用いると，式 (1) の左辺第 2 項は負の符号を除いて

$$\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy\right] dx \tag{2}$$

となる．内部の積分を行えば，

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy = F_1(x, y)\Big|_{y=u(x)}^{y=v(x)} = F_1[x, v(x)] - F_1[x, u(x)].$$

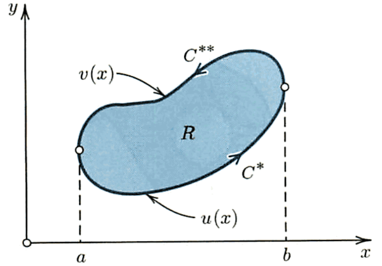


図 4.16　特別な領域の例

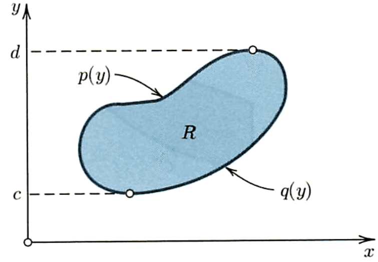


図 4.17　特別な領域の例

これを式 (2) に代入して次式を得る．

$$\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b F_1[\,x, v(x)\,]\,dx - \int_a^b F_1[\,x, u(x)\,]\,dx$$
$$= -\int_b^a F_1[\,x, v(x)\,]\,dx - \int_a^b F_1[\,x, u(x)\,]\,dx.$$

図 4.16 において，$y = v(x)$ は向きづけられた曲線 C^{**} を表し，$y = u(x)$ は C^* を表しているから，右辺の積分は C^{**}，C^* に関する線積分として書きなおすことができる．したがって，

$$\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dxdy = -\int_{C^{**}} F_1(x, y)\,dx - \int_{C^*} F_1(x, y)\,dx$$
$$= -\oint_C F_1(x, y)\,dx. \qquad (3)$$

これで $F_2 = 0$ のときにグリーンの定理 (1) が証明された．

かりに C のある部分が図 4.18 の $\widetilde{C}, \widetilde{\widetilde{C}}$ のように y 軸に平行であるとしても結果は式 (3) と同じである．実際，式 (3) の右辺では x について積分しているので，その部分に関する積分は 0 である．ゆえに，これを C^*, C^{**} についての積分に加えても，式 (3) における全境界 C 上の積分に変わりはない．

同様に，4.3 節の式 (4) を使えば，式 (1) の左辺の第 1 項は特別な領域の第 2 の表示 (図 4.17) に基づいてつぎのように計算される．

$$\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\right] dy$$
$$= \int_c^d F_2(q(y), y)\,dy + \int_d^c F_2(p(y), y)\,dy$$
$$= \oint_C F_2(x, y)\,dy.$$

これと式 (3) から式 (1) が導かれるので，特別な領域について定理が証明されたことになる．

領域 R それ自体はこのような特別なものではないけれども，有限個の特別な領域に分割できるような場合 (図 4.19) に定理を証明しよう．この場合には，定理をそれぞれ

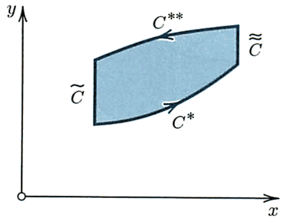


図 4.18 グリーンの定理の証明

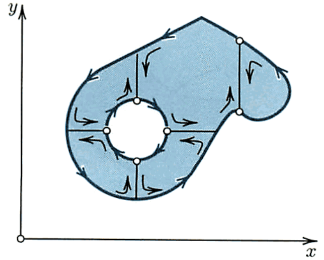


図 4.19 グリーンの定理の証明

の特別な領域に適用し，それらの結果を加え合わせることにする．左辺の和は全領域 R に対する積分になるし，右辺は C 上の線積分と R を分割するために導入した曲線上の線積分とを加えたものになる．しかし，この最後の積分のおのおのは 1 回ずつ反対方向に 2 回繰り返される．よって，これらの 2 つの積分は互いに打ち消し合い，結局 C 上の線積分だけが残るわけである．

上の証明で仮定された領域は実用上必要なほとんどすべての場合を含んでいる．定理の条件を満足するもっとも一般的な領域 R に対して定理を証明するためには，R をここで考えた形の領域で近似し，さらにその極限をとって論じなければならない．詳細については付録 1 の [5] を参照せよ． ◀

グリーンの定理の応用

例 2 境界上の線積分としての平面領域の面積 式 (1) においてまず $F_1 = 0$，$F_2 = x$，つぎに $F_1 = -y$，$F_2 = 0$ とおけば，それぞれ

$$\iint_R dx dy = \oint_C x\, dy, \qquad \iint_R dx dy = -\oint_C y\, dx$$

を得る．左辺の 2 重積分は R の面積 A であるから，

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (x\, dy - y\, dx) \tag{4}$$

とも書ける．積分はグリーンの定理に示されているように行う．この公式の要点は，R の面積を境界上の線積分によって表していることである．これにはいろいろな応用がある．たとえば，ある種のプラニメータ (面積を測定する器具) の理論はこの公式に基づいている．

楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ または $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ に対しては，$x' = -a\sin t$，$y' = b\cos t$ となるので，式 (4) からつぎの周知の結果が導かれる．

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [ab\cos^2 t - (-ab\sin^2 t)]\, dt = \pi ab.$$ ◀

例 3 極座標による平面領域の面積 r, θ を $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ で定義される極座標とする．そのとき，

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \qquad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

であり，式 (4) は微積分でよく知られた公式

$$A = \frac{1}{2}\oint_C r^2\, d\theta \tag{5}$$

となる．式 (5) の応用例として**カルジオイド** $r = a(1 - \cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を考えよう (図 4.20)．結果は

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi}{2}a^2$$

である． ◀

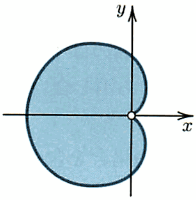


図 4.20　カルジオイド

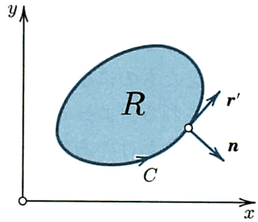


図 4.21　例 4

例 4　**ある関数のラプラシアンの 2 重積分を法線方向の導関数の線積分に変換すること**　ラプラシアンは物理学や工学において重要な役割を演ずるが，すでに 3.9 節で導入され，さらに第 3 巻 3 章でも論じられている．ここではグリーンの定理を利用してラプラシアンを含む基本的な積分公式を導こう．

関数 $w(x,y)$ はグリーンの定理に規定された閉領域 R を含む xy 平面上のある領域において連続であり，かつ連続な 1 階および 2 階の偏導関数をもつものとする．いま $F_1 = -\partial w/\partial y$，$F_2 = \partial w/\partial x$ とおくと，$\partial F_1/\partial y$，$\partial F_2/\partial x$ は R において連続である．式 (1) の左辺は

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w \tag{6}$$

となり，w のラプラシアン (3.9 節) を与える．さらに，式 (1) の右辺は

$$\begin{aligned}\oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy) &= \oint_C \left(F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds}\right) ds \\ &= \oint_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) ds \end{aligned} \tag{7}$$

と書ける．ここで s は C の弧の長さであり，C は図 4.21 のように向きづけられている．右辺の積分の被積分関数は 2 つのベクトル

$$\operatorname{grad} w = \frac{\partial w}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\boldsymbol{j} \quad \text{および} \quad \boldsymbol{n} = \frac{dy}{ds}\boldsymbol{i} - \frac{dx}{ds}\boldsymbol{j}$$

の内積として表される．すなわち，

$$-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds} = (\operatorname{grad} w)\cdot \boldsymbol{n} \tag{8}$$

である．ベクトル

$$\boldsymbol{r}'(s) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{ds}\boldsymbol{j} \qquad (3.5\text{ 節})$$

は C の単位接線ベクトルであって，$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{n} = 0$ を満足するから，$\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{n}$ は互いに垂直である．したがって，ベクトル $\boldsymbol{n}$ は C の単位法線ベクトルである．$\boldsymbol{n}$ が C の外側に向いていることも容易にわかる．これと 3.9 節の式 (6) により，式 (8) の右辺は C の外向きの法線方向の w の導関数であることが示される．この方向微分係数は R の**法線方向微分係数**とよばれ，$\partial w/\partial n$ と記される．グリーンの定理と式 (6), (7), (8) を組み合わせると，有用な積分公式

$$\boxed{\iint_R \nabla^2 w\,dx dy = \oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\,ds} \tag{9}$$

が導かれる．たとえば，$w = x^2 - y^2$ はラプラスの方程式 $(\nabla^2 w = 0)$ を満足するので，法線方向微分係数の閉曲線上の線積分は 0 でなければならない．正方形 $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ の領域に対してこのことを直接積分により確かめよ．◀

平面におけるグリーンの定理は積分の計算のために役にたつ．具体的な積分計算においては，2 重積分と線積分のどちらが簡単であるかに応じて 2 通りの利用法が考えられる．具体例は問題に譲りたい．基礎的な立場からみても，グリーンの定理は (4.9 節のストークスの定理のような) きわめて重要な積分定理の証明のための有力な手段を提供する．

❖❖❖❖❖ 問題 4.4 ❖❖❖❖❖

グリーンの定理による線積分の計算

領域 R の境界曲線 C 上の反時計まわりの線積分 $\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ をグリーンの定理を用いて計算せよ．

1. $\boldsymbol{F} = [x^2 e^y, y^2 e^x]$，$C$：頂点 $(0,0)$，$(2,0)$，$(2,3)$，$(0,3)$ の長方形．

2. $\boldsymbol{F} = [3y^2, x - y^4]$，$R$：頂点 $(1,1)$，$(-1,1)$，$(-1,-1)$，$(1,-1)$ の正方形の領域．

3. $\boldsymbol{F} = [y, -x]$，C：円 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$．

4. $\boldsymbol{F} = [2xy^3, 3x^2y^2]$，$C$：円 $x^4 + y^4 = 1$ (図示せよ)．

5. $\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\,(\sin x \cos y)$，$C$：楕円 $25x^2 + 9y^2 = 225$．

6. $\boldsymbol{F} = [\sin y, \cos x]$，$R$：頂点 $(0,0)$，$(\pi,0)$，$(\pi,1)$ の 3 角形の領域．

7. $\boldsymbol{F} = [\tan 0.2x, x^5 y]$，$R$：$x^2 + y^2 \leqq 25$，$y \geqq 0$．

8. $\boldsymbol{F} = [\cosh y, -\sinh x]$，$R$：$1 \leqq x \leqq 3$，$x \leqq y \leqq 3x$．

9. $\boldsymbol{F} = [e^y/x, e^y \ln x + 2x]$，$R$：$1 + x^4 \leqq y \leqq 2$．

10. $\boldsymbol{F} = [x \cosh 2y, 2x^2 \sinh 2y]$，$R$：$x^2 \leqq y \leqq x$．

グリーンの定理の別の応用

面積　つぎの領域の面積を求めよ．

11. カルジオイド (例 3)　内部の第 1 象限の領域．

12. サイクロイド　$\boldsymbol{r} = a(t - \sin t)\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\boldsymbol{j}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ の弧の下の領域．(図示せよ．式 (4) を使え．)

13. リマソン (パスカル[6]の蝸牛線)　$r = 1 + 2\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi/2)$ の弧の下の第 1 象限の領域．(式 (5) を使え．)

法線方向微分係数の積分　問題 14–18 では，式 (9) を用いて領域 R の境界曲線 C 上の反時計まわりの線積分 $\oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\, ds$ を計算せよ．(計算の詳細を示せ．)

14. $w = e^x + e^y$，R：長方形 $0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 1$．

15. $w = \cosh x$，R：頂点 $(0,0)$，$(4,2)$，$(0,2)$ の 3 角形．

16. $w = e^x \sin y$，R：問題 15 と同じ．

---

6) Etienne Pascal (1588–1651)，フランスの有名な数学者で哲学者である Blaise Pascal (1623–1662) の父親．

17. $w = 3x^2y - y^3 + y^2$, $C: 25x^2 + y^2 = 25$.

18. $w = x^5y + xy^5$, $R: x^2 + y^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.

19. (ラプラスの方程式) 境界曲線 C，外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の領域 R におけるラプラスの方程式 $\nabla^2 w = 0$ の解 $w(x, y)$ は，

$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = \oint_C w \frac{\partial w}{\partial n}\, ds \qquad \textbf{(10)}$$

を満足することを示せ．

20. ［プロジェクト］ **平面におけるグリーンの定理の別の形** R, C をグリーンの定理と同様に定義し，C の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{r}'$，外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ (例 4 の図 4.21) とする．式 (1) は

$$\iint_R \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdy = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds, \qquad \textbf{(11)}$$

または

$$\iint_R (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k}\, dxdy = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'\, ds \qquad \textbf{(12)}$$

と書きかえられることを示せ．ただし，$\boldsymbol{k}$ は xy 平面に垂直な単位ベクトルである．$\boldsymbol{F} = [7x, -3y]$ で C が円 $x^2 + y^2 = 4$ の場合と自分で選んだほかの実例について式 (11), (12) を確認せよ．

4.5 曲　　面

平面領域に対する線積分や 2 重積分はすでに説明したので，空間における曲面 (球，円柱の部分など) で積分する面積分に話題をうつそう．そのため面積分の基礎として必要な曲面および曲面の法線から議論をはじめよう．

曲面の表示

“曲面” という用語は曲面全体だけでなく曲面の部分をさすことも多い．これは曲線の弧を簡単に “曲線” とよんだのと同じことである．

xyz 空間における曲面 S の表示として，

$$z = f(x, y) \qquad \text{あるいは} \qquad g(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

などが考えられる．たとえば，$z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ や $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ $(z \geqq 0)$ は中心が原点で半径 a の半球を表している．

線積分における曲線 C に対しては，パラメータ表示 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ のほうが実際的でもあり適応性も大きい．これは t 軸上の区間 $a \leqq t \leqq b$ の xyz

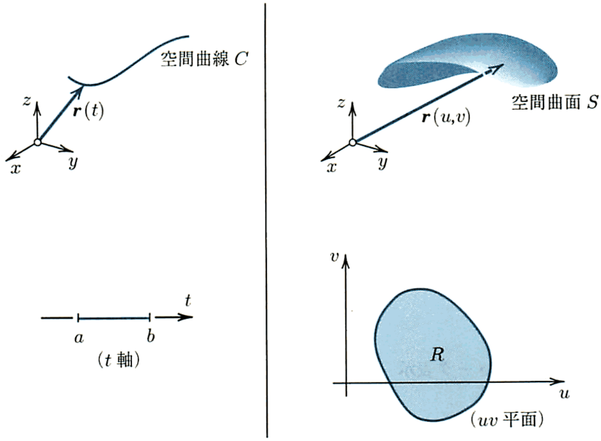


図 4.22　曲線および曲面のパラメータ表示

空間の曲線 C の上への写像であり，区間内のすべての t を位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の C の点に写像する (図 4.22).

面積分における曲面 S に対しても，同様なパラメータ表示を用いるほうがしばしば実際的である．曲面は 2 次元であるから，2 つのパラメータ u, v が必要である．したがって，空間における曲面 S の**パラメータ表示**は領域 R の点 (u, v) に対して

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

のような形になる．この写像 (2) は R におけるすべての点 (u, v) を位置ベクトル $\boldsymbol{r}(u, v)$ の S の点に写像する (図 4.22).

例 1　円柱のパラメータ表示　半径 a，高さ 2 で z 軸を軸とする円柱は

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad -1 \leqq z \leqq 1$$

で表される．パラメータ表示は

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [a\cos u,\ a\sin u,\ v] = a\cos u\,\boldsymbol{i} + a\sin u\,\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k} \qquad (\text{図 } 4.23)$$

である．パラメータ u, v は uv 平面の長方形の領域 $R: 0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -1 \leqq v \leqq 1$ において変化する．$\boldsymbol{r}(u, v)$ の成分は

$$x = a\cos u, \qquad y = a\sin u, \qquad z = v$$

となる．曲線 $v =$ 一定 は平行な円を与え，曲線 $u =$ 一定 は鉛直方向の直線を与える．図 4.23 の点 P は $u = \pi/3 = 60°$，$v = 0.7$ に対応する．◀

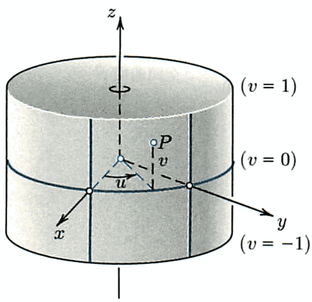


図 4.23 円柱のパラメータ表示

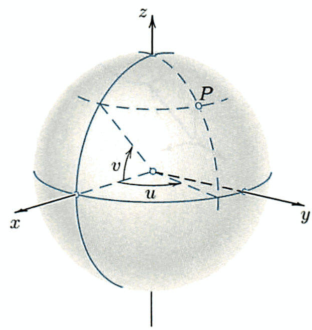


図 4.24 球のパラメータ表示

例 2 **球のパラメータ表示** 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ は

$$\boldsymbol{r}(u,v)=a\cos v\cos u\,\boldsymbol{i}+a\cos v\sin u\,\boldsymbol{j}+a\sin v\,\boldsymbol{k} \qquad (3)$$

のように表現される．ここで，パラメータ u,v は不等式 $0 \leqq u \leqq 2\pi$，$-\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2$ によって与えられる uv 平面上の領域 R の中で変化する．$\boldsymbol{r}$ の成分は

$$x=a\cos v\cos u, \qquad y=a\cos v\sin u, \qquad z=a\sin v$$

である．$u=$ 一定，$v=$ 一定 という曲線は S 上の "経線" および "緯線" である (図 4.24)．表示 (3) は地理学で地球上の点の緯度や経度の測定に利用されている．

数学で通常用いられる別のパラメータ表示は

$$\boldsymbol{r}(u,v)=a\cos u\sin v\,\boldsymbol{i}+a\sin u\sin v\,\boldsymbol{j}+a\cos v\,\boldsymbol{k} \qquad (3^*)$$

である．この場合 u,v の範囲は $0 \leqq u \leqq 2\pi$，$0 \leqq v \leqq \pi$ である． ◀

例 3 **円錐のパラメータ表示** 円錐 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0 \leqq z \leqq H$ は

$$\boldsymbol{r}(u,v)=[u\cos v,\ u\sin v,\ u]=u\cos v\,\boldsymbol{i}+u\sin v\,\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}$$

で表される．u,v は長方形 $R: 0 \leqq u \leqq H$，$0 \leqq v \leqq 2\pi$ の中で変化する．$\boldsymbol{r}(u,v)$ の成分は

$$x=u\cos v, \qquad y=u\sin v, \qquad z=u$$

であって，当然 $x^2+y^2=z^2$ を満足する．$u=$ 一定 および $v=$ 一定 のときにはどんな曲線を表すか．スケッチせよ． ◀

接平面と曲面の法線

面積分を定義する前の準備として，後に必要となる曲面の法線ベクトルを導入しよう．点 P における曲面 S の**法線ベクトル**とは，すでに 3.9 節で述べたように，P における S の**接平面**に垂直なベクトル (図 4.25) を意味する．ただし，

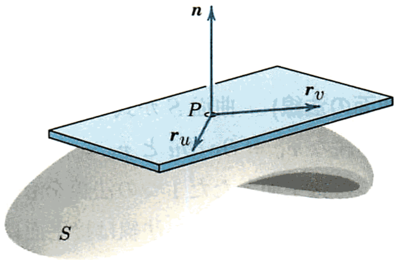


図 4.25　接平面と法線ベクトル

接平面とは P を通る S 上のすべての曲線の接線ベクトルを含む平面のことである．S は式 (2) の $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ で与えられるので，S 上の曲線 C は 1 対の (いずれかは定数でない) 連続関数

$$u = u(t), \qquad v = v(t)$$

によって与えられ，位置ベクトル $\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$ をもつことがわかる．これらの関数の微分可能性を仮定し連鎖法則 (3.8 節) を適用すれば，C の接線ベクトルとして

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'(t) = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}u' + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}v'$$

が得られる．ゆえに P における偏導関数 $\boldsymbol{r}_u$ および $\boldsymbol{r}_v$ は P において S に接している．$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ が 1 次独立であって，P における S の接平面を張ると仮定すると，それらの外積は P における S の法線ベクトル

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0} \tag{4}$$

を与える．対応する**単位法線ベクトル** (図 4.25) は

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|}\boldsymbol{N} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \tag{5}$$

である．また，S が $g(x, y, z) = 0$ で表されるときは，3.9 節の定理 2 によって

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\operatorname{grad} g|}\operatorname{grad} g \tag{5*}$$

と書ける．

曲面 S はその法線が S 上の点とともに連続的に変化するとき**滑らかな曲面**であるという．

有限個の滑らかな部分からなる曲面 S を**区分的に滑らかな曲面**とよぶ．

たとえば，球面は滑らかであるが，立方体の表面は区分的に滑らかである (説明せよ)．以上の結果を定理にまとめておく．

定理 1 (接平面と曲面の法線) 曲面 S が式 (2) で与えられ，S のすべての点で式 (4) を満足する連続な $\boldsymbol{r}_u = \partial \boldsymbol{r}/\partial u$ と $\boldsymbol{r}_v = \partial \boldsymbol{r}/\partial v$ が存在するとき，S はすべての点でただ 1 つの接平面とただ 1 つの法線をもつ．ただし，接平面は P を含み $\boldsymbol{r}_u$ と $\boldsymbol{r}_v$ で張られる平面であり，法線は接平面に垂直で S 上の点とともに方向が連続的に変化する直線である．

S の単位法線ベクトルは式 (5) で与えられる (図 4.25)．

例 4 球の単位法線ベクトル 式 (5*) から，球 $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ の単位法線ベクトルは，次式であることがわかる．

$$\boldsymbol{n}(x, y, z) = \left[\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right] = \frac{x}{a}\boldsymbol{i} + \frac{y}{a}\boldsymbol{j} + \frac{z}{a}\boldsymbol{k}. \qquad \blacktriangleleft$$

例 5 円錐の単位法線ベクトル 例 3 の円錐 $g(x, y, z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ の頂点では単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は不定になる．実際，式 (5*) から次式が得られる．

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\right). \qquad \blacktriangleleft$$

本節で学んだ曲面に関する知識は次節の面積分の理論に利用される．

❖❖❖❖❖ 問題 4.5 ❖❖❖❖❖

面積分への準備：曲面のパラメータ表示，法線

実際に重要な曲面のパラメータ表示に習熟するために，曲面の表示 (1) を導き，**パラメータ曲線** ($u =$ 一定，$v =$ 一定 の曲線) を求め，法線ベクトル $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ を定めよ．(計算の詳細を示せ．)

1. xy 平面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [u, v]$ (すなわち $u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$，問題 2–10 でも同様)

2. 極座標による xy 平面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [u\cos v,\ u\sin v]$ (つまり $u = r,\ v = \theta$)

3. 円錐 $\boldsymbol{r}(u, v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ cu]$

4. 回転放物面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ u^2]$

5. 楕円放物面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [au\cos v,\ bu\sin v,\ u^2]$

6. 楕円面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [a\cos v\cos u,\ b\cos v\sin u,\ c\sin v]$

7. 双曲放物面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [au\cosh v,\ bu\sinh v,\ u^2]$

8. 双曲面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [a\sinh u\cos v,\ b\sinh u\sin v,\ c\cosh u]$

9. 楕円柱 $\boldsymbol{r}(u, v) = [a\cos v,\ b\sin v,\ u]$

10. らせん面 $\boldsymbol{r}(u, v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ v]$ (らせん面という命名の理由を説明せよ．)

11. ［CAS プロジェクト］ **曲面のプロット** 問題 1–10 の曲面をプロットせよ．問題 1, 2 で $z = 0$ を追加せよ．a, b, c の値を変えたときに曲面がどのように変わるかを調べよ．

曲面のパラメータ表示の導出 つぎの曲面のパラメータ表示を見いだせ．(可能なパラメータ表示のうち 1 つだけ答えればよい．) 法線ベクトルも求めよ．(詳細を示せ．)

12. 平面 $x = z$

13. 平面 $3x + 4y + 6z = 24$

14. 楕円柱 $9x^2 + 4y^2 = 36$

15. 楕円面 $x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1$

16. 球 $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$

17. 双曲柱 $x^2 - y^2 = 1$

18. 楕円錐 $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$

19. 放物面 $z = 9(x^2 + y^2)$

20. (法線ベクトル) 問題 2–5 において式 (4) が成立しない点を見いだせ．これは曲面の形によるのかあるいはパラメータ表示の選び方によるのかを示せ．

21. (法線ベクトル) 問題 19 の放物面を $\boldsymbol{N}(0,0) \neq \boldsymbol{0}$ となるように表現せよ．$\boldsymbol{N}$ を求めよ．

22. (曲面上の直交座標) 曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 上のパラメータ曲線 $u =$ 一定 および $v =$ 一定 が垂直に交わるための必要十分条件は $\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0$ であることを示せ．

23. (表示 $z = f(x,y)$) 曲面の表示 $z = f(x,y)$ は

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [\,u,\ v,\ f(u,v)\,] \quad \text{および} \quad \boldsymbol{N} = [\,-f_u,\ -f_v,\ 1\,] \tag{6}$$

と書きかえられる ($f_u = \partial f/\partial u,\ f_v = \partial f/\partial v$) ことを示せ．

曲面の法線と接平面

曲面の法線 (問題 1–10 も参照せよ．) 次式で表される曲面の単位法線ベクトルを求めよ．

24. $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$

25. $4x - 4y + 7z = -3$

26. $z = 5xy$

27. $y^2 + z^2 = a^2$

28. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

29. $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

30. ［プロジェクト］ **接平面** $T(P)$ はそれほど重要ではないが，その表示法は知っておかなければならない．つぎのことを示せ．

(a) $S : \boldsymbol{r}(u,v)$ ならば，$T(P) : (\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{r}_u \quad \boldsymbol{r}_v) = 0$ (スカラー 3 重積) または $\boldsymbol{r}^*(p,q) = \boldsymbol{r}(P) + p\boldsymbol{r}_u(P) + q\boldsymbol{r}_v(P)$ である．

(b) $S : g(x,y,z) = 0$ ならば，$T(P) : (\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{r}(P)) \cdot \nabla g = 0$ である．

(c) $S : z = f(x,y)$ ならば，$T(P) : z^* - z = (x^* - x)f_x(P) + (y^* - y)f_y(P)$ である．

(a)–(c) を幾何学的に解釈せよ．2 つずつ実例をあげよ．

4.6 面 積 分

面積分を定義するために，領域 R のパラメータ u, v を用いたパラメータ表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(u,v) &= [\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\,] \\ &= x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,z)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1}$$

によって与えられる曲面 S をとろう．S は区分的に滑らかであって，法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ したがって単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ がほとんどすべての点 (立方体や円錐

などの辺や頂点を除く) で存在すると仮定する．すなわち

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \quad \text{および} \quad \boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{N}|}\boldsymbol{N} \tag{2}$$

(4.5 節) である．与えられたベクトル関数 $\boldsymbol{F}$ に対して，S 上の面積分を

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = \iint_R \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(u,v)]\cdot\boldsymbol{N}(u,v)\,dudv \tag{3}$$

によって定義する．被積分関数は内積であるから，ベクトルではなくスカラーであることを注意したい．この積分は流れの問題において自然な形で現れ，$\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{v}$ のときに S を通る流束 (単位時間あたりの S を通る流体の質量，3.10 節参照) を与える．ここで ρ は流体の密度であり，$\boldsymbol{v}$ は流れの速度ベクトルである．この意味で面積分 (3) を**流束積分**ということもできるだろう．

式 (3) の右辺の積分は S に対応する uv 平面の領域 R に関する 2 重積分 (4.3 節) である．この積分が存在するのは，$\boldsymbol{F}$ が連続で S が区分的に滑らかであって，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}$ も区分的に連続な場合である．

式 (3) はつぎのように動機づけられる．外積の定義によって，$|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|$ は $\boldsymbol{r}_u$ と $\boldsymbol{r}_v$ を辺とする平行 4 辺形の面積である．したがって，$dA = |\boldsymbol{N}|\,dudv$ は S の面素とよばれる．$\boldsymbol{n}$ を掛けて式 (2) を使えば

$$\boldsymbol{n}\,dA = \boldsymbol{n}|\boldsymbol{N}|\,dudv = \boldsymbol{N}\,dudv \tag{3*}$$

が得られる．これと $\boldsymbol{F}$ との内積をとって積分した結果が式 (3) である．

成分で表して

$$\boldsymbol{F} = [F_1,\ F_2,\ F_3] = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}, \tag{3**a}$$

$$\boldsymbol{n} = [\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma] = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}, \tag{3**b}$$

$$\boldsymbol{N} = [N_1,\ N_2,\ N_3] = N_1\boldsymbol{i} + N_2\boldsymbol{j} + N_3\boldsymbol{k} \tag{3**c}$$

とすれば，式 (3) はつぎのように書きかえられる．

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dA &= \iint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)\,dA \\ &= \iint_R (F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3)\,dudv.\end{aligned} \tag{4}$$

実際，右辺の第 1 積分の被積分関数は $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ に相当し，第 2 積分の被積分関数は $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}$ に相当する (3.2 節の式 (2))．α,β,γ は $\boldsymbol{n}$ と座標軸の正の方向のなす角である．なぜならば，3.2 節の式 (4) により $\cos\alpha = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}/(|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}$ となるからである．β,γ についても同様である． ◀

その他の形の面積分はあとで論じる.

例 1 曲面を通る流束 図 4.26 の放物柱 $S: y=x^2,\ 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq z \leqq 3$ を通る水の流束を計算せよ．ただし，速度ベクトルは $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}=[3z^2, 6, 6xz]$ とし，速さは m/s 単位で測るものとする．(一般には $\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{v}$ であるが，水の密度は $\rho=1$ [g/cm^3] $=1$ [トン/m^3] である.)

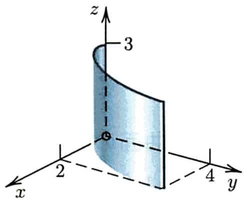


図 4.26 例 1 の曲面 S

[解] $x=u,\ z=v$ とすると，$y=x^2=u^2$ となる．S のパラメータ表示は

$$S: \boldsymbol{r}=[u,\ u^2,\ v] \qquad (0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 3)$$

である．これから

$$\boldsymbol{r}_u=[1,\ 2u,\ 0], \qquad \boldsymbol{r}_v=[0,\ 0,\ 1],$$
$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v=[2u,\ -1,\ 0]$$

を得る．S 上では，$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(u,v)]$ を単に $\boldsymbol{F}(S)$ と書けば，$\boldsymbol{F}(S)=[3v^2, 6, 6uv]$ となるから，$\boldsymbol{F}(S)\cdot\boldsymbol{N}=6uv^2-6$ である．積分によって，

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dA=\int_0^3\int_0^2 (6uv^2-6)\,du\,dv=\int_0^3 (3u^2v^2-6u)\Big|_{u=0}^{2} dv$$
$$=\int_0^3 (12v^2-12)\,dv=(4v^3-12v)\Big|_{v=0}^{3}$$
$$=108-36=72\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

が得られる. ◀

例 2 面積分 S が平面 $x+y+z=1$ の第 1 象限の部分 (図 4.27) で $\boldsymbol{F}=[x^2,\ 0,\ 3y^2]$ のとき，式 (3) を計算せよ．

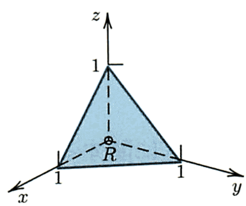


図 4.27 例 2 の平面の部分

[解] $x=u,\ y=v$ とおけば，$z=1-x-y=1-u-v$ となる．ゆえに，平面 $x+y+z=1$ を $\boldsymbol{r}(u,v)=[u,\ v,\ 1-u-v]$ で表すことができる．この平面の第 1 象限にある部分 S では，$x=u$ と $y=v$ の範囲は S の xy 平面への射影 R 内に制限される．R は 2 つの座標軸と直線 $x+y=1$ で囲まれた 3 角形であって，$0 \leqq x \leqq 1-y,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で与えられる．

視察あるいは微分により，

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v=[1,0,-1]\times[0,1,-1]=[1,1,1].$$

したがって，$\boldsymbol{F}(S)\cdot\boldsymbol{N}=[u^2,0,3v^2]\cdot[1,1,1]=u^2+3v^2$ である．式 (3) から，

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dA=\iint_R (u^2+3v^2)\,du\,dv=\int_0^1\int_0^{1-v} (u^2+3v^2)\,du\,dv$$
$$=\int_0^1 \left[\frac{1}{3}(1-v)^3+3v^2(1-v)\right] dv=\frac{1}{3}$$

となる.

◀

式 (3), (4) により積分値は単位法線ベクトルの選び方によることがわかる．($\boldsymbol{n}$ のかわりに $-\boldsymbol{n}$ を選ぶこともできる．) このことを面積分 (3), (4) は**向きづけられた曲面** S に関する積分であると表現する．向きづけられる曲面では，2 つの可能な単位法線ベクトルのどちらかを全曲面 S にわたって連続的に選ぶことができる．(区分的に滑らかな曲面の場合にはさらに検討する必要がある．) S の向きを変えれば，すなわち $\boldsymbol{n}$ を $-\boldsymbol{n}$ でおきかえれば，式 (4) における $\boldsymbol{n}$ の各成分の符号が変わるので，つぎの定理が導かれる．

定理 1 (曲面の向きの変化) $\boldsymbol{n}$ を $-\boldsymbol{n}$ に ($\boldsymbol{N}$ を $-\boldsymbol{N}$ に) 変えると面積分 (3), (4) は -1 倍される．

S が式 (1) の形で与えられているとき，このような $\boldsymbol{N}$ の変更を実現する方法は何か．もっとも簡単な方法は u と v を交換することである．その場合，$\boldsymbol{r}_u$ と $\boldsymbol{r}_v$ は互いに入れかわり，$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ は $\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{N}$ となるからである．つぎの例で説明しよう．

例 3 面積分における曲面の向きの変化 例 1 の曲面 S を $\widetilde{\boldsymbol{r}} = [v, v^2, u]$ ($0 \leqq v \leqq 2$, $0 \leqq u \leqq 3$) で表すと，

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \widetilde{\boldsymbol{r}}_u \times \widetilde{\boldsymbol{r}}_v = [0, 0, 1] \times [1, 2v, 0] = [-2v, 1, 0]$$

となる．$\boldsymbol{F} = [3z^2, 6, 6xz]$ に対しては $\widetilde{\boldsymbol{F}}(S) = [3u^2, 6, 6uv]$ が得られる．したがって，$\widetilde{\boldsymbol{F}}(S) \cdot \widetilde{\boldsymbol{N}} = -6u^2v + 6$ となり，積分の結果はつぎのように例 1 の結果の -1 倍である．

$$\iint_R \widetilde{\boldsymbol{F}}(S) \cdot \widetilde{\boldsymbol{N}}\, dv du = \int_0^3 \int_0^2 (-6u^2v + 6)\, dv du$$

$$= \int_0^3 (-12u^2 + 12)\, du = -72. \quad ◀$$

曲面の向きに関する補足

滑らかな曲面 曲面 S が滑らかならば，S の任意の点 P において単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を選ぶことができる．$\boldsymbol{n}$ の方向を S の P における正の法線方向とよぶ．明らかに $\boldsymbol{n}$ を選ぶのに 2 つの可能性がある．

滑らかな曲面 S が**向きづけられる**というのは，S 上の任意の点 P_0 における正の法線方向が全曲面にわたって連続的にかつただ 1 通りに決まることである．

滑らかな曲面の十分に小さい部分がつねに向きづけられる事実は実際上本質的である．理論的な観点から興味があるのは，大きい曲面は必ずしも向きづけられないことである．これらは向きづけられない曲面とよばれる．このような

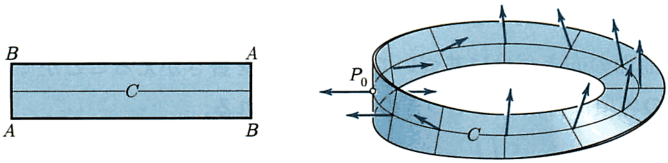
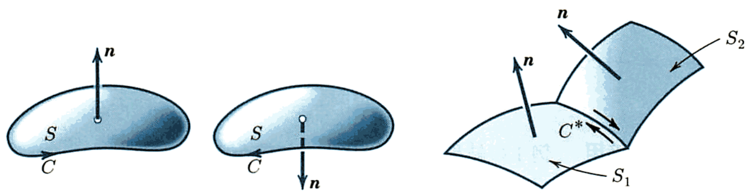


図 4.28 メービウスの帯

曲面のよく知られた例は**メービウス**[7]**の帯** (図 4.28) である．P_0 において与えられた法線ベクトルを図 4.28 の曲線 C に沿って連続的に動かしていくと，P_0 に戻ったときの法線ベクトルは P_0 におけるはじめの法線ベクトルと逆向きである．メービウスの帯の模型は，長い長方形の紙を 1 枚とり，図 4.28 における 2 点 A および 2 点 B がそれぞれ一致するように，紙をなかばねじって短い対辺をはりつけてつくることができる．

区分的に滑らかな曲面　区分的に滑らかな曲面もつぎのような簡単な考え方で向きづけることができる．S が滑らかで向きづけられ，単純な閉曲線 C によって囲まれているときには，図 4.29 (a) に示したように，C の向きに応じて S の 2 つの可能な向きのどちらかを選ぶ．区分的に滑らかな曲面 S は，S の 2 つの滑らかな部分 S_1, S_2 の共通の境界である各曲線 C^* に沿って，S_1 に対する C^* の正方向が S_2 に対する C^* の正方向と反対であるように，S のそれぞれの滑らかな部分を向きづけることができれば，**向きづけられる**という．図 4.29 (b) は 2 つの滑らかな部分からなる曲面の向きづけを表現している．



(a) 滑らかな曲線　　(b) 区分的に滑らかな曲線

図 4.29 曲面の向き

7) August Ferdinand Möbius (1790–1868)，ドイツの数学者．Gauss の弟子で，曲面論，射影幾何学，力学などの業績で知られている．

面積分 (3), (4) の別の表示

以上の曲面の向きづけに基づいて面積分 (4) を書きかえることができる．面積分 (4) の各項は習慣としてつぎのように書かれる．

$$\iint_S F_1 \cos\alpha \, dA = \iint_S F_1 \, dydz, \tag{5a}$$

$$\iint_S F_2 \cos\beta \, dA = \iint_S F_2 \, dzdx, \tag{5b}$$

$$\iint_S F_3 \cos\gamma \, dA = \iint_S F_3 \, dxdy. \tag{5c}$$

ベクトル記号を使ってまとめると，

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dA = \iint_S (F_1 \, dydz + F_2 \, dzdx + F_3 \, dxdy). \tag{6}$$

これは 4.1 節の線積分 (3′) の類似形である．これらの公式は面積分を平面領域上の 2 重積分に変換して計算するために用いられるが，その際には S の向き ($\boldsymbol{n}$ の選択) に注意を払わなければならない．式 (5c) について説明しよう．曲面 S が $z = h(x, y)$ ((x, y) は xy 平面の領域 R の変数) で与えられ，$\cos\gamma > 0$ となるように向きづけられているときには，

$$\iint_S F_3 \cos\gamma \, dA = +\iint_R F_3[\,x, y, h(x, y)\,] \, dxdy \tag{5c′}$$

であり，$\cos\gamma < 0$ のときには，

$$\iint_S F_3 \cos\gamma \, dA = -\iint_R F_3[\,x, y, h(x, y)\,] \, dxdy \tag{5c″}$$

である．なぜならば，xy 平面の面素 $dxdy$ は S の面素 dA の射影 $|\cos\gamma|\,dA$ に等しく，式 (5c′) では $\cos\gamma > 0$ により $\cos\gamma = +|\cos\gamma|$，式 (5c″) では $\cos\gamma < 0$ により $\cos\gamma = -|\cos\gamma|$ となるからである．式 (5a), (5b), (6) についても同様である．

例 4　**式 (6) の適用**　例 1 の結果を式 (6) によって確かめよ．

［解］　例 1 では $F_1 = 3z^2$，$F_2 = 6$，$F_3 = 6xz$ である．曲面 S は $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ で表されるので，各座標軸上の積分区間は $0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 4$，$0 \leqq z \leqq 3$ となる．また，

$$\boldsymbol{N} = |\boldsymbol{N}|\boldsymbol{n} = |\boldsymbol{N}|[\,\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\,] = [\,2u, -1, 0\,] = [\,2x, -1, 0\,]$$

であるから，$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta < 0$，$\cos\gamma = 0$ となり，積分の符号は式 (5a) で正，式 (5b) で負，式 (5c) で 0 である．以上をまとめると，

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dA = \int_0^3 \int_0^4 3z^2 \, dydz - \int_0^2 \int_0^3 6 \, dzdx = 4 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3 \cdot 2 = 72.$$

が得られ，例 1 の結果が確認される．◀

曲面の向きに無関係な面積分

別の形の面積分

$$\iint_S G(\boldsymbol{r})\,dA = \iint_R G(\boldsymbol{r}(u,v))|\boldsymbol{N}(u,v)|\,dudv \tag{7}$$

も考えられる．ここで，$dA = |\boldsymbol{N}|\,dudv = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,dudv$ は式 (1) で表される曲面 S の面素であって，曲面の向きは無視してよい．

応用としては，$G(\boldsymbol{r})$ が S の密度ならば，式 (7) は S の全質量を与える．とくに $G=1$ ならば，式 (7) は S の**面積** $A(S)$ を与える．

$$A(S) = \iint_S dA = \iint_R |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,dudv. \tag{8}$$

例 5 球面の面積　半径 r の球は 4.5 節の式 (3) すなわち

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [a\cos v\cos u,\ a\cos v\sin u,\ a\sin v]$$

によって表される．ただし，$0 \leqq u \leqq 2\pi$，$-\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2$ である．直接計算により，

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = [a^2\cos^2 v\cos u,\ a^2\cos^2 v\sin u,\ a^2\cos v\sin v]$$

が得られる (確かめよ)．そこで，$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ などを使えば，

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = a^2(\cos^4 v\cos^2 u + \cos^4 v\sin^2 u + \cos^2 v\sin^2 v)^{1/2} = a^2|\cos v|$$

となるから，式 (8) は球の表面積に関するよく知られた公式を与える．

$$A(S) = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} |\cos v|\,dudv = 2\pi a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos v\,dv = 4\pi a^2.$$ ◀

例 6 輪環面 (ドーナツ型) の表示と面積　輪環面 (トーラス) S は，円 C の属する平面がつねに空間に固定された直線 L を含み，しかも C が L と交わったり接したりしないように，C を L のまわりに回転させて得られる．図 4.30 のように，L を z 軸，C の半径を b，C の中心と L との距離を $a\,(>b)$ とすれば，S は

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a+b\cos v)\cos u\,\boldsymbol{i} + (a+b\cos v)\sin u\,\boldsymbol{j} + b\sin v\,\boldsymbol{k}$$

で表される．そのとき，

$$\boldsymbol{r}_u = -(a+b\cos v)\sin u\,\boldsymbol{i} + (a+b\cos v)\cos u\,\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}_v = -b\sin v\cos u\,\boldsymbol{i} - b\sin v\sin u\,\boldsymbol{j} + b\cos v\,\boldsymbol{k}.$$

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = b(a+b\cos v)(\cos u\cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u\cos v\,\boldsymbol{j} + \sin v\,\boldsymbol{k})$$

である．ゆえに $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = b(a+b\cos v)$ となり，これと式 (8) から輪環面の面積として

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\cos v)\,dudv = 4\pi^2 ab \tag{9}$$

を得る． ◀

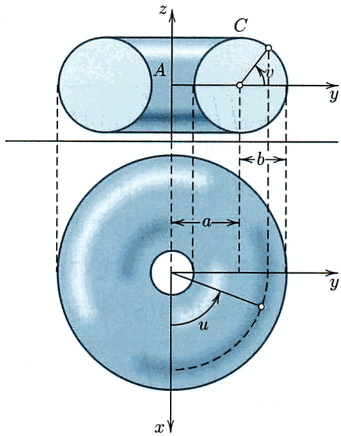


図 4.30　例 6 の輪環面

例 7　慣性モーメント　質量 M の一様な球面薄層 $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の z 軸に関する慣性モーメントを求めよ．

［解］　質量が曲面 S 上に分布し密度 (= 単位面積あたりの質量) が $\mu(x, y, z)$ であるとき，与えられた軸 L に関するその質量の慣性モーメント I は，面積分

$$I = \iint_S \mu D^2 \, dA \tag{10}$$

によって定義される．ここで，$D(x, y, z)$ は L から点 (x, y, z) までの距離である．この例では μ は一定であり，S の面積は $A = 4\pi a^2$ であるから，$\mu = M/A = M/(4\pi a^2)$ となる．

S に対して例 5 と同じパラメータ表示を用いる．すると，$D^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 v$，また例 5 と同様に $dA = a^2 \cos v \, du dv$ となる．計算の結果はつぎのとおりである．(積分では $\cos^3 v = \cos v(1 - \sin^2 v)$ を使え．)

$$I = \iint_S \mu D^2 \, dA = \frac{M}{4\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} a^4 \cos^3 v \, du dv$$
$$= \frac{Ma^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 v \, dv = \frac{2Ma^2}{3}.$$
◀

表示 $z = f(x, y)$　曲面 S が $z = f(x, y)$ で表されるときには，$u = x$，$v = y$，$\boldsymbol{r} = [u, v, f]$ とおいて，

$$|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \big| [1, 0, f_u] \times [0, 1, f_v] \big|$$
$$= \big| [-f_u, -f_v, 1] \big| = \sqrt{1 + f_u{}^2 + f_v{}^2}$$

を得る．$f_u = f_x$，$f_v = f_y$ であるから，公式 (7) は

$$\iint_S G(\mathbf{r})\,dA = \iint_{R^*} G(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \tag{11}$$

と書きかえられる．ただし，R^* は S の xy 平面への射影 (図 4.31) であり，S の法線ベクトル $\mathbf{N}$ は上向きとする．$\mathbf{N}$ が下向きならば右辺の積分に負号がつく．

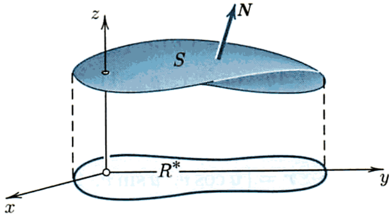


図 4.31　公式 (11)

式 (11) において $G=1$ とおけば，曲面 $S: z=f(x,y)$ の**面積** $A(S)$ に関する公式

$$A(S) = \iint_{R^*} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \tag{12}$$

が導かれる．ここでも R^* は S の xy 平面への射影である．

❖❖❖❖❖ 問題 4.6 ❖❖❖❖❖

面積分

流束積分 (3) $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$　つぎのデータを与えて積分を計算せよ．曲面の種類を示せ．(計算の詳細を述べよ．)

1. $\mathbf{F}=[3x^2, y^2, 0]$, $S: \mathbf{r}=[u,\ v,\ 2u+3v]$ $(0 \leqq u \leqq 2,\ -1 \leqq v \leqq 1)$
2. $\mathbf{F}=[x^2, e^y, 1]$, $S: x+y+z=1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0)$
3. $\mathbf{F}=[e^{2y}, e^{-2z}, e^{2x}]$,
   $S: \mathbf{r}=[3\cos u,\ 3\sin u,\ v]$ $(-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2,\ 0 \leqq v \leqq 2)$
4. $\mathbf{F}=[\sinh yz, 0, y^4]$, $S: \mathbf{r}=[u,\ \cos v,\ \sin v]$ $(-4 \leqq u \leqq 4,\ 0 \leqq v \leqq \pi)$
5. $\mathbf{F}=[x-z, y-x, z-y]$,
   $S: \mathbf{r}=[u\cos v,\ u\sin v,\ u]$ $(0 \leqq u \leqq 3,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi)$
6. $\mathbf{F}=[y^3, x^3, z^3]$, $S: x^2+4y^2=1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq z \leqq h)$
7. $\mathbf{F}=[0, x, 0]$, $S: x^2+y^2+z^2=1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0)$
8. $\mathbf{F}=[4xy, 2x^2, 0]$, $S: \mathbf{r}=[\cosh u,\ \sinh u,\ v]$ $(0 \leqq u \leqq 2,\ -3 \leqq v \leqq 3)$
9. $\mathbf{F}=[x, y, z]$, $S: \mathbf{r}=[u\cos v,\ u\sin v,\ u^2]$ $(0 \leqq u \leqq 4,\ -\pi \leqq v \leqq \pi)$
10. $\mathbf{F}=[x^2, y^2, z^2]$, $S: \mathbf{r}=[u\cos v,\ u\sin v,\ 3v]$ $(0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi)$

11. **［CAS プロジェクト］ 面積分のプログラム** 面積分 (3) を計算するプログラムをかけ．ただし，各段階で生じうる困難を実感できるように，中間的な結果 ($\boldsymbol{F}(S)$, $\boldsymbol{N}$, 被積分関数，1 回目の積分) も打ち出せるプログラムにせよ．このプログラムを問題 5, 問題 9 および自分で選んだ 3 つの実例 (S はそれぞれ球，楕円面，らせん面とする) に適用せよ．

面積分 (7) $\displaystyle\iint_S G(\boldsymbol{r})\,dA$ 式 (7) か式 (11) を用いて与えられた積分を計算せよ．(詳細を示せ.)

12. $G = \cos x + \sin y$, $S: x + y + z = 1$ の第 1 象限の部分

13. $G = ye^{-xy}$, $S: z = 3x + 4y \quad (x \geqq 1,\ y \geqq 1)$

14. $G = x^4 + y^4$, $S: \boldsymbol{r} = [\,5\cos u,\ 5\sin u,\ v\,] \quad (0 \leqq u \leqq \pi,\ -0.2 \leqq v \leqq 0.2)$

15. $G = (1 + 9xz)^{3/2}$, $S: \boldsymbol{r} = [\,u,\ v,\ u^3\,] \quad (0 \leqq u \leqq 1,\ -2 \leqq v \leqq 2)$

16. $G = (x^2 + y^2)^2 - z^2$, $S: \boldsymbol{r} = [\,u\cos v,\ u\sin v,\ 2u\,] \quad (0 \leqq u \leqq 1,\ -\pi \leqq v \leqq \pi)$

17. $G = z$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad (z \geqq 0)$

応用：重心，慣性モーメント

18. **(重心)** 空間における密度 (単位面積あたりの質量) $\sigma(x, y, z)$ の薄層 S に対して，質量 M と重心 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ を与えるつぎの公式を検証せよ．

$$M = \iint_S \sigma\,dA, \qquad \overline{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\sigma\,dA, \qquad \overline{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\sigma\,dA, \qquad \overline{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\sigma\,dA$$

19. **(慣性モーメント)** 問題 18 の薄層の x, y, z 軸に関する慣性モーメントを表すつぎの公式を検証せよ．

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\sigma\,dA, \qquad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\sigma\,dA, \qquad I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\sigma\,dA$$

20. 問題 18 の薄層の直線 $y = x$, $z = 0$ のまわりの慣性モーメントを与える公式を導け．

密度 1 の薄層 S の軸 A に関する慣性モーメントを求めよ．

21. $S: x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqq z \leqq h$, $A: z$ 軸

22. S は問題 21 と同じ，$A: xz$ 平面上の直線 $z = h/2$

23. $S: x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leqq z \leqq h$, $A: z$ 軸

24. **(シュタイナー[8)]の定理)** 全質量 M の質量分布の重心を通る軸 A に関する慣性モーメントが I_A のとき，A に平行で A からの距離が k である軸 B に関する慣性モーメント I_B は

$$I_B = I_A + k^2 M$$

で与えられることを示せ．

25. シュタイナーの定理を用いて，問題 22 における薄層 S の x 軸に関する慣性モーメントを求めよ．

---

8) Jacob Steiner (1796–1863)，スイスの幾何学者．小さな村に生まれ，14 歳ではじめて教育を受け，18 歳でペスタロッチの生徒となり，後にハイデルベルク，ベルリンで学び，ついにそのすぐれた研究のためにベルリン大学教授に指名された．

26. [協同プロジェクト] **曲面の第1基本形式** 曲面 $S: \mathbf{r}(u,v)$ が与えられたとき，係数[9)]

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \qquad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \qquad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \tag{13}$$

をもつ2次の微分形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2 \tag{14}$$

を S の**第1基本形式**とよぶ．これは曲面の理論において基本的な概念であって，長さ，角，面積などの算定に役だつ．このことを示すために，つぎの諸命題を証明せよ．

(a) S 上の曲線 $C: u = u(t),\ v = v(t)\ (a \leqq t \leqq b)$ の長さは式(13)と3.5節の式(10)から

$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}\,dt = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\ dt \tag{15}$$

で表される．

(b) $S: \mathbf{r}(u,v)$ 上で互いに交わる2曲線 $C_1: u = g(t),\ v = h(t)$ および $C_2: u = p(t),\ v = q(t)$ のなす角 γ は

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \tag{16}$$

によって与えられる．ただし，$\mathbf{a} = \mathbf{r}_u g' + \mathbf{r}_v h'$，$\mathbf{b} = \mathbf{r}_u p' + \mathbf{r}_v q'$ はそれぞれ C_1, C_2 の接線ベクトルである．

(c) 法線ベクトル $\mathbf{N}$ の大きさは

$$|\mathbf{N}|^2 = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 \tag{17}$$

で表され，S の面積 $A(S)$ に対する公式(8)は

$$A(S) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{N}|\,dudv = \iint_R \sqrt{EG - F^2}\ dudv \tag{18}$$

と書きかえられる．

(d) $x = u\cos v,\ y = u\sin v$ で定義される極座標 $u(=r),\ v(=\theta)$ に対しては $E = 1$，$F = 0$，$G = u^2$ となるので，

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

が得られる．これと式(18)から半径 a の円板の面積を計算せよ．

(e) 例6の輪環面の第1基本形式を定め，これから輪環面の面積 A を計算せよ．A はパップス[10)]**の定理**によっても求められることを示せ．パップスの定理によれば，回転曲面の面積は，その子午線 C が角 2π だけ回転したときの C の重心の道の長さと C の長さの積に等しい．

(f) 自分で選んだ重要な曲面(円柱，円錐など)の通常の表示に対する第1基本形式を決定し，その結果を長さと面積の計算に応用せよ．

---

9) E, F, G は標準的な記号である．もちろん，これらは本章でしばしば現れる関数 F, G とは何の関係もない．

10) アレクサンドリアのPappus (300A.D.頃)，ギリシャの数学者．この定理はグルディンの定理ともよばれる．Habakuk (改宗後はPaul) Guldin (1577–1643) はスイスのセントガレンで生まれ，後にグラーツ，ウィーン両大学の教授となった．

4.7 3 重積分，ガウスの発散定理

本節では 3 重積分を扱い，面積分を 3 重積分に変換する第 1 の “大” 定理を導く．それはベクトル関数の発散を含むので**ガウスの発散定理**とよばれる．(ここで読者は発散を論じた 3.10 節を復習するとよい．)

3 重積分は 4.3 節で導入された 2 重積分を一般化したものである．この積分を定義するために，空間の有界な閉領域[11] T で定義されたある関数を考える．3 次元領域 T を 3 つの座標面に平行な平面で分割する．そのとき T の内部にある直方体の分割領域に 1 から n までの番号をつける．このような直方体のそれぞれの中に任意の点を選び，たとえば第 k 番目の直方体の中の点を (x_k, y_k, z_k) とする．ΔV_k を第 k 番目の直方体の体積として，和

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$$

をつくる．この和は正の整数 n のそれぞれの値についてまったく任意にとり，n を次第に大きくしていく．ただし，分割によって生じる最大の直方体の辺の長さは n が無限大になるにつれて 0 に近づくようにする．こうして実数列 $J_{n_1}, J_{n_2}, \cdots$ が得られる．$f(x, y, z)$ は T を含むある領域で連続であり，T は有限個の滑らかな曲面 (4.5 節) で囲まれていると仮定すれば，この数列は分割の仕方や点 (x_k, y_k, z_k) の選び方に無関係にある極限値に収束することが示される (付録 1 の [5] 参照)．この極限値を領域 T に関する $f(x, y, z)$ の **3 重積分**といい，

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dxdydz \quad \text{または} \quad \iiint_T f(x, y, z)\,dV$$

と書く．

3 重積分は積分を 3 回繰り返すことによって計算される．これは，2 重積分が 4.3 節で述べたように 2 回続けて積分して得られたのとよく似ている．実例は後の例 1 に示される．

ガウスの発散定理

3 重積分と領域の境界面に関する面積分は互いに変換することができる．これは，2 種類の積分のうちどちらか計算が簡単なほうを選べる点で，実用上重要な意味がある．また，流体の運動や熱伝導などにおける基礎方程式を確立するためにも役だつ．この種の変換は，あるベクトル関数 $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3] = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$

11) 4.3 節の脚注 1) において説明されている．(ただし，“境界” は境界面を意味するものとし，“円” のかわりに “球” をとる．)

の発散

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad (3.10\text{ 節}) \tag{1}$$

を含む発散定理を用いて実現される．

定理 1 (ガウスの発散定理 (体積積分と面積分との間の変換))　T を空間における有界閉領域[12)]とし，その境界を区分的に滑らかな[13)]向きづけられる曲面 S とする．$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ は T を含むある領域において連続でかつ連続な 1 階偏導関数をもつベクトル関数であるとする．このとき，

$$\iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA \tag{2}$$

がなりたつ．ここで，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトル (図 4.32 のように S の外側に向かう) である．

証明は例 1 のあとに示す．

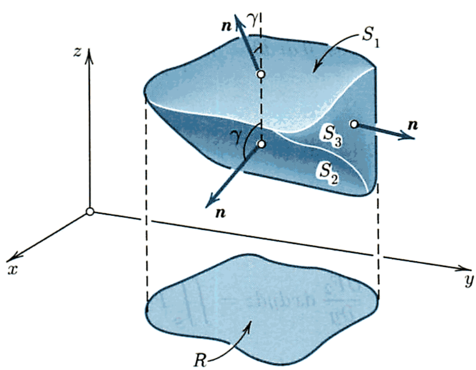


図 4.32　特別な領域の例

公式 (2) の成分による表現　式 (1) を使い $\boldsymbol{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ とおいて，公式 (2) を

$$\iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx dy dz = \iint_S (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma)\, dA \tag{3*}$$

と書くことができる．前節の式 (6) によれば，これはまた

12)　“閉” は境界面 S が領域の部分であることを意味する．

13)　4.5 節を参照せよ．

$$\iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S (F_1\, dydz + F_2\, dzdx + F_3\, dxdy) \tag{3}$$

のように書きかえられる．

例 1 **発散定理による面積分の計算** 発散定理を証明する前に典型的な実例を示そう．3 重積分への変換によって積分

$$I = \iint_S (x^3\, dydz + x^2 y\, dzdx + x^2 z\, dxdy)$$

を計算せよ．ただし，S は円柱 $x^2+y^2=a^2$ $(0 \leqq z \leqq b)$ および 2 つの円板 $z=0$，$z=b$ $(x^2+y^2 \leqq a^2)$ よりなる閉曲面である．(S を図示せよ．)

［解］ この場合には式 (3) において

$$F_1 = x^3,\ F_2 = x^2 y,\ F_3 = x^2 z, \quad \text{したがって} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$$

である．$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ で定義される極座標 (空間では円柱座標 r, θ, z) を導入すれば，$dxdydz = r\, drd\theta dz$ となり，

$$I = \iiint_T 5x^2\, dxdydz = 5\int_{z=0}^{b}\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\cos^2\theta\, r\, drd\theta\, dz$$

$$= 5b\int_0^a\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\, drd\theta = 5b\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{5}{4}\pi b a^4$$

が得られる． ◀

［発散定理の証明］ 明らかに，式 (3*) の両辺における各成分の積分が互いに等しければ，すなわち

$$\iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dxdydz = \iint_S F_1 \cos\alpha\, dA, \tag{4}$$

$$\iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dxdydz = \iint_S F_2 \cos\beta\, dA, \tag{5}$$

$$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dxdydz = \iint_S F_3 \cos\gamma\, dA \tag{6}$$

が成立すれば，式 (3*) は真である．

まず，区分的に滑らかな向きづけられる曲面 S によって囲まれ，座標軸のどれかと平行な直線との交わりが高々 1 つの線分 (あるいは 1 点) であるような特別な領域 T について，式 (6) を証明する．これは T が

$$g(x,y) \leqq z \leqq h(x,y) \tag{7}$$

の形で表されることを意味する．(x,y) は T の xy 平面への正射影 R の中で変化する．明らかに，$z=g(x,y)$ は S の "底面"S_2 を表し，一方 $z=h(x,y)$ は S の "上面"S_1 を表す (図 4.32)．そして，S にはさらに残りの垂直な部分 S_3 がある．(S_3 の部分は球の場合のように 1 つの曲線に退化しているかもしれない．)

式 (6) を証明するために式 (7) を用いる．$\boldsymbol{F}$ は T を含むある領域で連続微分可能であるから，

$$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dxdydz = \iint_R \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz\right] dxdy. \qquad (8)$$

括弧内の積分を行えば，

$$\int_g^h \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz = F_3[x,y,h(x,y)] - F_3[x,y,g(x,y)].$$

したがって，式 (8) の左辺は

$$\iint_R F_3[x,y,h(x,y)]\,dxdy - \iint_R F_3[x,y,g(x,y)]\,dxdy \qquad (9)$$

となる．ところが，式 (6) の右辺を計算しても同じ結果が得られるのである．実際，4.6 節の式 (5c) から

$$\iint_S F_3 \cos\gamma\,dA = \iint_S F_3\,dxdy$$
$$= +\iint_R F_3[x,y,h(x,y)]\,dxdy - \iint_R F_3[x,y,g(x,y)]\,dxdy$$

と書けることがわかる．R に関する第 1 の積分が正の符号をとるのは，4.6 節の式 (5c′) と同様に図 4.32 の S_1 上で $\cos\gamma > 0$ となるからである．さらに，R に関する第 2 の積分が負の符号をとるのは，4.6 節の式 (5c″) (h を g におきかえる) と同様に S_2 上で $\cos\gamma < 0$ となるからである．これで式 (6) が証明された．

関係式 (4) または (5) を導くには，ただ変数の記号をつけかえて，T が仮定により式 (7) と類似の表示

$$\tilde{g}(y,z) \leqq x \leqq \tilde{h}(y,z) \quad \text{または} \quad \tilde{\tilde{g}}(z,x) \leqq y \leqq \tilde{\tilde{h}}(z,x)$$

をもつという事実を使うだけでよい．特別な領域に対する発散定理の証明はこれで終わる．

領域 T が補助の曲面を用いて有限個の特別な領域に分割できる場合には，各部分に対する結果を別々に加えることによって，定理を導くことができる．この方法は 4.4 節におけるグリーンの定理の証明とよく似ている．補助面上の面積分はそれぞれ 1 対になって打ち消され，残った面積分の和は T の全境界面 S 上の面積分に等しい．一方，T の各部分に対する体積積分を加え合わせたものが T に関する体積積分になる．

以上で，実際問題において重要な任意の有界領域に対して発散定理が証明されたわけである．この定理で規定されているもっとも一般的な領域 T にまで拡張するためには，ある種の極限操作が必要になってくる．この事情は 4.4 節におけるグリーンの定理の場合と同様である．◀

例 2　**発散定理の検証**　球 $S: x^2+y^2+z^2=4$ 上の積分 $\iint_S (7x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{n}\,dA$ を，(a) 公式 (2) および (b) 直接計算によって求めよ．

［解］ (a)　$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \operatorname{div}[7x, 0, -z] = \operatorname{div}(7x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{k}) = 7-1 = 6$ からすぐ求められる．答えは $6\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = 64\pi$ である．

(b)　S を 4.5 節の式 (3) ($a=2$) で表し，$\boldsymbol{n}\,dA = \boldsymbol{N}\,dudv$ (4.6 節の式 (3*)) を使えばよい．すなわち，

$$S : \boldsymbol{r} = [\,2\cos v\cos u,\ 2\cos v\sin u,\ 2\sin v\,],$$
$$\boldsymbol{r}_u = [\,-2\cos v\sin u,\ 2\cos v\cos u,\ 0\,],$$
$$\boldsymbol{r}_v = [\,-2\sin v\cos u,\ -2\sin v\sin u,\ 2\cos v\,],$$
$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = [\,4\cos^2 v\cos u,\ 4\cos^2 v\sin u,\ 4\cos v\sin v\,].$$

S 上では $x = 2\cos v\cos u,\ \ z = 2\sin v$ であるから，$\boldsymbol{F} = [\,7x,\ 0,\ -z\,]$ は

$$\boldsymbol{F}(S) = [\,14\cos v\cos u,\ 0,\ -2\sin v\,]$$

となり，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(S)\cdot\boldsymbol{N} &= (14\cos v\cos u)4\cos^2 v\cos u + (-2\sin v)4\cos v\sin v\\ &= 56\cos^3 v\cos^2 u - 8\cos v\sin^2 v\end{aligned}$$

が得られる．これを S 上で $u=0$ から $u=2\pi$ まで積分しなければならない．その結果は

$$\pi\cdot 56\cos^3 v - 2\pi\cdot 8\cos v\sin^2 v$$

である．$\cos v\sin^2 v$ の積分は $(\sin^3 v)/3$ となり，$\cos^3 v = \cos v(1-\sin^2 v)$ の積分は $\sin v - (\sin^3 v)/3$ となる．S では $-\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2$ なので，v について積分した結果は

$$56\pi\left(2-\frac{2}{3}\right) - 16\pi\cdot\frac{2}{3} = 64\pi$$

であり，(a) と一致する．(a), (b) の計算量を比較すれば，発散定理の威力が実感できるであろう． ◀

発散定理のその他の応用は下記の問題とつぎの 4.8 節で扱われる．次節で述べる実例は発散の性質とその応用を一層よく理解する助けとなるだろう．

❖❖❖❖❖ 問題 4.7 ❖❖❖❖❖

3 重積分の応用

質量分布 問題 1–7 の空間領域 T における密度 σ の質量分布の全質量を求めよ．(計算の詳細を示せ.)

1. $\sigma = x^2+y^2+z^2,\quad T:$ 直方体 $|x| \leqq 1,\ |y| \leqq 3,\ |z| \leqq 2$
2. $\sigma = e^{-x-y-z},\quad T: 0 \leqq x \leqq 1-y,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 2$
3. $\sigma = \sin\pi x\cos\pi y + 2,\quad T:$ 直方体 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{2},\ |z| \leqq 2$
4. $\sigma = (x^2+y^2)^2/3,\quad T:$ 円柱 $x^2+y^2 \leqq 9,\ -3 \leqq z \leqq 3$
5. $\sigma = 12xy,\quad T:$ 頂点 $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ の 4 面体
6. $\sigma = 4z,\quad T:\ y = 1-x^2,\ z = x$ で囲まれた第 1 象限の領域
7. $\sigma = 2/yz,\quad T: 0 \leqq x \leqq 2,\ e^{-x} \leqq y \leqq 1,\ e^{-x} \leqq z \leqq 1$

慣性モーメント つぎの領域 T における密度 1 の質量分布の x 軸に関する慣性モーメント $I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,dxdydz$ を求めよ．

8. 直方体: $0 \leqq x \leqq a,\ -b/2 \leqq y \leqq b/2,\ -c/2 \leqq z \leqq c/2$

9. 立方体: $0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a,\ 0 \leqq z \leqq a$

10. 円錐: $y^2 + z^2 \leqq x^2,\ 0 \leqq x \leqq h$

11. 円柱: $y^2 + z^2 \leqq a^2,\ 0 \leqq x \leqq h$

12. 球: $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$

発散定理の応用

面積 $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA$　この積分を発散定理によって計算せよ．(詳細を示せ．同じような問題は次節の問題にも含まれている．)

13. $\boldsymbol{F} = [x^2,\ 0,\ z^2]$,　S：問題 1 の直方体の境界面

14. $\boldsymbol{F} = [e^x,\ e^y,\ e^z]$,　S：立方体 $|x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1,\ |z| \leqq 1$ の境界面

15. $\boldsymbol{F} = [\cos y,\ \sin x,\ \cos z]$,　S：$x^2 + y^2 \leqq 4,\ |z| \leqq 2$ の境界面

16. $\boldsymbol{F}$ は問題 15 と同じ，　$S : x^2 + y^2 \leqq 9,\ 0 \leqq z \leqq 2$ の境界面

17. $\boldsymbol{F} = [4x,\ x^2 y,\ -x^2 z]$,　S：問題 5 の 4 面体の境界面

18. $\boldsymbol{F} = [2x^2,\ y^2/2,\ -\cos \pi z]$,　S：問題 5 の 4 面体の境界面

19. $\boldsymbol{F} = [x^3,\ y^3,\ z^3]$,　S：球 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

20. ［論文プロジェクト］ **発散定理の単純化**　$\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ が定数ならば発散定理の応用は簡単になる．これ以外に発散定理が簡単に応用される場合 ($\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ が 1 変数だけに依存する場合，対称性がある場合，円柱座標や球座標が適用される場合など) を見いだせ．実例をつくれ．結果を系統的にまとめて小論文を書け．

4.8 発散定理の応用

発散定理にはさまざまな応用があり重要な結果もある．そのいくつかをつぎの例によって示そう．これらの例では，領域および関数は発散定理が成立するための条件を満足する．そしてそれぞれの場合，$\boldsymbol{n}$ は前と同様に領域の境界面の外向きの単位法線ベクトルである．

例 1　**発散の座標によらない表現，発散の不変性**　前節の式 (1) ではベクトル関数 $\boldsymbol{F}$ の発散を座標によって定義したが，$\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ は実は座標の選び方には無関係な意味をもっている．発散定理を用いてこれを証明しよう．

そのために，まず 3 重積分の基礎的な性質は 4.3 節で論じた 2 重積分と本質的に同じであることを指摘しておく．とくに，3 重積分に対する平均値定理によれば，領域 T における任意の連続関数 $f(x, y, z)$ に対して，

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = f(x_0, y_0, z_0)\, V(T) \qquad (V(T) = T \text{ の体積}) \tag{1}$$

を満足するような点 $Q\,(x_0, y_0, z_0)$ が T の中に存在する．ここで，両辺を交換して $V(T)$ で割り $f = \operatorname{div} \boldsymbol{F}$ とおけば，発散定理により公式

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V(T)} \iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA \qquad (2)$$

が得られる．ただし $S(T)$ は T の境界面である．

T において任意の定点 $P : (x_1, y_1, z_1)$ を選び，T の点の P からの距離の最大値 $d(T)$ が 0 に近づくように，T を P に向かって縮めると，$Q : (x_0, y_0, z_0)$ は P に近づくに相違ない．したがって，式 (2) は

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T) \to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA \qquad (3)$$

となる．この公式は発散の定義として用いられることもある．3.10 節における発散の定義は座標を含んでいるけれども，公式 (3) は座標とは無関係である．これからただちに発散はデカルト座標の選び方によらないことが結論される． ◀

例 2 発散の物理的解釈 発散定理によってベクトルの発散の直観的な解釈が得られる．このために，一定密度 $\rho = 1$ の非圧縮性流体 (3.10 節) の定常流，すなわち時間的に変化しない流れを考えよう．このような流れは任意の点 P における速度ベクトル $\boldsymbol{v}(P)$ の場によって定められる．

S を空間領域 T の境界面とし，$\boldsymbol{n}$ を S の外向きの単位法線ベクトルとする．S の内部から外部に面積 ΔA の S の小部分 ΔS を通って単位時間に流れる流体の質量は $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta A$ に等しい．ここで，$v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$[14] は ΔS の適当な点でとられた $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の法線成分である．ゆえに，S を横切って T から外部に単位時間に流れる流体の全質量は，面積分

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dA$$

によって与えられる．この積分は T から流出する全流量を表し，T の体積 V で割った

$$\frac{1}{V} \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dA \qquad (4)$$

は T から流れ出る平均流量を表すことになる．流れは定常で流体は非圧縮性であるから，外に流れ出る流体の量は連続的に補われなければならない．したがって，積分 (4) の値が 0 でないとすれば，T の中に**湧き出し** (正の湧き出しおよび負の湧き出しすなわち**吸い込み**) が存在するはずである．湧き出しとは流体が発生したり消失したりする点のことである．

T を T 内に固定した点 P に縮めると，式 (4) は P における湧き出しの強さを与える．これは式 (3) の右辺で $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ におきかえることによって得られ，$\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ に等しいことがわかる．したがって，非圧縮性流体の定常流の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の発散は，対応する点における流れの湧き出しの強さである．$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \equiv 0$ のときまたそのときに限って，T の中には湧き出しがない．この場合，T における任意の閉曲面 S に対して，

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = 0$$

がなりたつ． ◀

---

14) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ はある点で負になりうることに注意したい．これはそのような点では流体が S の内部に流れ込むことを意味する．

例 3 熱流のモデル化，熱方程式 熱は物体の中で温度の低い方向に流れることが知られている．また物理実験の結果，熱流の速さは温度勾配に比例することも示されている．これは物体内における熱流の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = -K \operatorname{grad} U \tag{5}$$

のように表されることを意味する．ただし，$U(x, y, z, t)$ は温度，t は時間であり，K はその物体の**熱伝導率**とよばれ，ふつうの物理的環境のもとでは定数である．この情報を使って熱流の数学的モデル，いわゆる**熱方程式**をつくれ．

[解] T を物体内の領域そして S をその境界面とする．単位時間に T を出る熱量は

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dA$$

である．$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向における $\boldsymbol{v}$ の成分である．この式は前の例 2 と同様にして得られる．式 (5) と発散定理から，

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dA = -K \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)\, dxdydz = -K \iiint_T \nabla^2 U\, dxdydz \tag{6}$$

となる．(3.10 節の式 (3) を参照せよ．) もちろん $\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$ は U のラプラシアンである．

一方，T における全熱量 H は

$$H = \iiint_T \sigma\rho U\, dxdydz$$

で与えられる．ここで，定数 σ はこの物体の材料の比熱であり，ρ はその密度 (= 単位体積あたりの質量) である．ゆえに，H の単位時間あたりの減少率は

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint_T \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dxdydz$$

であって，これは T を出る上記の熱量と等しくなければならない．式 (6) より，

$$-\iiint_T \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dxdydz = -K \iiint_T \nabla^2 U\, dxdydz,$$

または

$$\iiint_T \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - K\nabla^2 U\right) dxdydz = 0.$$

これは物体内の任意の領域 T に対して成立するから，被積分関数 (もし連続ならば) はいたるところで 0 でなくてはならない．すなわち，

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U} \qquad \left(c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}\right). \tag{7}$$

ただし c^2 はその材料の**熱拡散率**とよばれる．この偏微分方程式は**熱方程式**とよばれ，熱伝導に関する基本方程式である．熱方程式の誘導は発散定理の重要性を示す印象的な例証といえよう．

熱伝導の問題を解く方法は第 3 巻 3 章で述べる．熱流が時間によらない "定常流" ならば $\partial U/\partial t = 0$ となり，熱方程式はラプラスの方程式 $\nabla^2 U = 0$ に帰着する．つぎにラプラスの方程式について考察したい． ◀

ポテンシャル論，調和関数

ラプラスの方程式

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \tag{8}$$

の解の理論を**ポテンシャル論**という．また，連続な 2 階導関数をもつ式 (8) の解を**調和関数**[15]という．ポテンシャル論の詳細については，第 3 巻 3 章や第 4 巻 5 章で論じることにする．現時点では発散定理がポテンシャル論で中心的な役割を果たすことを示そう．

例 4 ラプラスの方程式の解の基礎的性質　発散定理に現れる被積分関数は $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ および $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ (4.7 節) である．$\boldsymbol{F}$ がスカラー関数の勾配であって $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$ と書ければ，3.10 節の式 (3) により $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f$ と表される．しかも $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad} f$ がなりたつ．これは定理の領域 T の境界面 S の外向き法線方向における f の方向微分係数にほかならない．この導関数を $\partial f/\partial n$ と記せば，発散定理は

$$\iiint_T \nabla^2 f\, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\, dA \tag{9}$$

と変形される．これは明らかに 4.4 節の公式 (9) の 3 次元への一般化である．

発散定理が成立するための仮定を考慮に入れると，式 (9) からただちにつぎの結果が得られる． ◀

定理 1 (調和関数の基礎的性質)　$f(x, y, z)$ をある領域 D における調和関数とする．そのとき，区分的に滑らか[16]で向きづけられる D 内の任意の閉曲面 S に関する関数 f の法線方向の導関数の積分は 0 である．

例 5 グリーンの公式　f および g はスカラー関数であって，$\boldsymbol{F} = f \operatorname{grad} g$ がある領域 T において発散定理の仮定を満足するとしよう．すると，3.10 節の問題 13(c) の公式により

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f\nabla^2 g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$$

となる．さらに，f はスカラー関数であるから，

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{n}\cdot(f \operatorname{grad} g) = (\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad} g) f$$

である．$\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad} g$ は S の外向き法線方向における g の方向微分係数 $\partial g/\partial n$ とみなされる．よって，発散定理の公式は“**グリーンの第 1 公式**”

$$\iiint_T (f\nabla^2 g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g)\, dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dA \tag{10}$$

15) この連続微分可能性の条件は，やや古いいくつかの文献のように除くべきではない．

16) 4.6 節を参照せよ．

に帰着する．この公式と仮定を合わせて**グリーンの定理の第 1 形式**とよぶ．

f と g を交換すると同様な公式が得られるが，これを式 (10) から引いた結果は

$$\iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dA \qquad \textbf{(11)}$$

となる．この公式は**グリーンの第 2 公式**あるいは (仮定と合わせて) **グリーンの定理の第 2 形式**とよばれる． ◀

例 6 ラプラスの方程式の解の一意性 f が領域 D において $\nabla^2 f = 0$ を満たす調和関数であり，区分的に滑らかで向きづけられる D 内の閉曲面 S 上でいたるところ 0 であるとする．そのとき，式 (10) における面積分が 0 となるから，式 (10) で $f = g$ とおき S の内部を T と記せば

$$\iiint_T \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f\, dV = \iiint_T |\operatorname{grad} f|^2\, dV = 0$$

が得られる．仮定により，$|\operatorname{grad} f|$ は T 内の S 上で連続で負にはならないので，T 内のすべての点で 0 でなければならない．ゆえに $f_x = f_y = f_z = 0$，すなわち f は T において定数であって，かつ連続性のために S 上での値 0 に等しい．これはつぎの定理の証明になっている． ◀

定理 2 (調和関数) 関数 $f(x, y, z)$ が領域 D における調和関数であり，区分的に滑らかで向きづけられる D 内の閉曲面 S 上のすべての点で 0 ならば，f は S に囲まれた領域 T において恒等的に 0 である．

この定理から重要な結果が導かれる．f_1 および f_2 は定理 1 の仮定を満たす関数とし，S 上において同じ値をとるものとする．そのとき，差 $f_1 - f_2$ もやはり定理 1 の仮定を満たし，しかも S 上でいたるところ値 0 をとる．したがって，定理 2 から T のあらゆる点で $f_1 - f_2 = 0$ であることがわかる．これでつぎの基本的な結果が得られた．

定理 3 (ラプラスの方程式の一意性の定理) T は発散定理の仮定を満足する領域，$f(x, y, z)$ は T とその境界面 S を含む領域 D における調和関数とすれば，f は S 上の値によって T 内で一意的に決定される．

領域 T の境界面 S 上で u が与えられた値をとるという条件のもとで，偏微分方程式の T における解 u を求める問題を**ディリクレ問題**[17]という．この立場から定理 3 を構成しなおすとつぎのようになる．

---

17) Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)，ドイツの数学者．パリで Cauchy たちに学び，1855 年にゲッチンゲンで Gauss の後継者となった．彼はフーリエ級数 (Fourier とは個人的に知り合っていた) や整数論などの重要な業績で知られている．

定理 3* **(ディリクレ問題に対する一意性の定理)** 定理 3 の仮定が満足されていて，ラプラスの方程式に対するディリクレ問題が T において解をもてば，これはただ 1 つの解である．

これらの諸定理はガウスの定理がポテンシャル論において非常に重要なことを示している．

❖❖❖❖❖ 問題 4.8 ❖❖❖❖❖

1. **(検証)** $f = 2z^2 - x^2 - y^2$ で S が直方体 $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$, $0 \leqq z \leqq 4$ の表面のとき，定理 1 を検証せよ．

2. **(検証)** $f = x^2 - y^2$ で S が円柱 $x^2 + y^2 \leqq 4$, $0 \leqq z \leqq 1$ の表面のとき，定理 1 を検証せよ．

発散定理による面積分の計算

問題 3–8 では，発散定理を用いて $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA$ を計算せよ．(計算の詳細を示せ．前節にも同じような問題がある．)

3. $\boldsymbol{F} = [x, z, y]$, S: 半球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqq 0$

4. $\boldsymbol{F} = [x, 3y, 6z]$, S: 円錐 $\sqrt{x^2 + y^2} \leqq z$, $0 \leqq z \leqq 3$ の境界面

5. $\boldsymbol{F} = [9x, y \cosh^2 x, -z \sinh^2 x]$, S: 楕円面 $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$

6. $\boldsymbol{F} = [5, 10y, z^3]$, S: $-1 \leqq x \leqq 1$, $x/2 \leqq y \leqq x$, $0 \leqq z \leqq y$ の境界面

7. $\boldsymbol{F} = [\sin x, y, z]$, $S: 0 \leqq x \leqq \pi/2$, $x \leqq y \leqq z$, $0 \leqq z \leqq 1$ の境界面

8. $\boldsymbol{F} = [1, xy, yz]$, $S: x^2 + y^2 \leqq z$, $y \geqq 0$, $z \leqq 4$ の境界面

9. **(面積分としての体積)** 境界面 S 内の領域 T の面積 V が

$$V = \frac{1}{3} \iint_S r \cos\phi \, dA$$

で与えられることを示せ．ただし，r は S 上の点 $P: (x, y, z)$ の原点 O からの距離であり，ϕ は有向線分 OP と P における S の外向き法線のなす角である．

10. 問題 9 の公式によって半径 a の球体の体積を求めよ．

11. 境界面 S の内部の領域 T の体積はつぎのように与えられることを示せ．

$$V = \iint_S x\, dydz = \iint_S y\, dzdx = \iint_S z\, dxdy$$
$$= \frac{1}{3} \iint_S (x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy).$$

12. **[協同プロジェクト] 発散定理とポテンシャル論** ポテンシャル論における発散定理の重要性は公式 (9)–(11) および定理 1–3 から明らかである．これをさらに強調するために，発散定理の仮定を満足する閉領域 T (境界面 S) を含む領域 D における調和関数 f, g を考え，つぎの諸命題を証明し実例をあげて説明せよ．

(a)
$$\iint_S g \frac{\partial g}{\partial n}\, dA = \iiint_T |\operatorname{grad} g|^2\, dV.$$

(b) S 上で $\partial g/\partial n = 0$ ならば，g は T において一定である．

(c) $$\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = 0.$$

(d) S 上で $\partial f/\partial n = \partial g/\partial n$ ならば，T において $f = g + c$ (c は定数) がなりたつ．

(e) ラプラシアンは座標系に無関係な形

$$\nabla^2 f = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \frac{\partial f}{\partial n}\, dA$$

で表される．ただし，$d(T)$ は $S(T)$ で囲まれた領域 T の点とラプラシアンを計算する点の距離の最大値であり，$V(T)$ は T の体積である．

4.9 ストークスの定理

4.7, 4.8 節ではガウスの定理がどんなに有効であるかをみたが，本節では第 2 の "大" 定理であるストークスの定理にうつろう．ストークスの定理は線積分を面積分に変換し，逆に面積分を線積分に変換する．したがって，この定理は 4.4 節のグリーンの定理を一般化したものである．その際，3.11 節で導入した回転

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

が現れる．

定理 1 (ストークス[18]の定理 (面積分と線積分の間の変換)) S を空間における区分的に滑らかな[19]向きづけられた曲面とし，S の境界を区分的に滑らかな単純閉曲線 C とする．$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ を S を含む空間の領域において連続な 1 階偏導関数をもつベクトル関数とする．そのとき，

$$\iint_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dA = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'(s)\, ds \tag{2}$$

となる．ここで $\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルであり，C のまわりの積分は $\boldsymbol{n}$ に応じて図 4.33 に示された向きにとられる．さらに，$\boldsymbol{r}' = d\boldsymbol{r}/ds$ は単位接線ベクトル，s は C の弧の長さである．

証明は例 1 のあとに示す．

---

18) Sir George Gabriel Stokes (1819–1903)，アイルランドの数学者で物理学者．1849 年にケンブリッジ大学教授となった．無限級数の理論，粘性流体 (ナビエ・ストークスの方程式)，測地学，光学などに対する重要な貢献によって知られている．

19) "区分的に滑らか" は，4.1, 4.6 節で定義ずみである．



図 4.33　ストークスの定理

公式 (2) の成分による表示　4.6 節の式 (4) において $\boldsymbol{F}$ に curl $\boldsymbol{F}$ を代入すると，式 (1) により式 (2) の成分表示

$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)N_1+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)N_2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)N_3\right]dudv$$

$$=\oint_{\overline{C}}(F_1\,dx+F_2\,dy+F_3\,dz) \qquad (3)$$

が得られる．ただし，R は $\boldsymbol{r}(u,v)$ によって表される曲面 S に対応する uv 平面上の境界 $\overline{C}$ の領域であって，$\boldsymbol{N}=[N_1,N_2,N_3]=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ である．

例 1　ストークスの定理の検証　ストークスの定理を証明する前に，$\boldsymbol{F}=[y,z,x]=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ で S が図 4.34 のような放物面

$$z=f(x,y)=1-(x^2+y^2), \qquad z\geqq 0$$

である場合に定理を確認しておこう．

［解］　曲線 C は円 $\boldsymbol{r}(s)=[\cos s,\sin s,0]=\cos s\,\boldsymbol{i}+\sin s\,\boldsymbol{j}$ である．単位接線ベクトルは $\boldsymbol{r}'(s)=[-\sin s,\cos s,0]=-\sin s\,\boldsymbol{i}+\cos s\,\boldsymbol{j}$ である．

よって，式 (2) の右辺の線積分は簡単に

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}[(\sin s)(-\sin s)+0+0]\,ds$$

$$=-\pi$$

となる．一方，式 (2) の左辺では

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{F}=[-1,-1,-1]$$

および

$$\boldsymbol{N}=\operatorname{grad}(z-f(x,y))=[2x,2y,1]$$

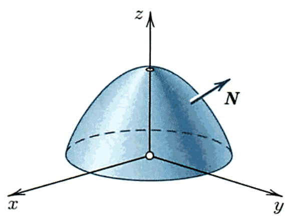


図 4.34　例 1 の曲面 S

でなければならない (確かめよ)．ゆえに，$(\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{N}=-2x-2y-1$ となり，

$$\iint_S(\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,dA=\iint_R(-2x-2y-1)\,dxdy$$

$$=\iint_{\widetilde{R}}(-2r\cos\theta-2r\sin\theta-1)r\,drd\theta$$

を得る．ここで，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$dxdy=r\,drd\theta$ であり，S の xy 平面への射影 R は極座標では $\widetilde{R}: r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$ として与えられる．すぐわかるように積分値は $-\pi$ に等しく，前の右辺の結果と一致する．

ストークスの定理で要請されるように，$\boldsymbol{N}$ は S の上向きの法線ベクトルであり，$\boldsymbol{r}(s)$ は C を反時計まわりに向きづけることを注意したい． ◀

[ストークスの定理の証明]　式 (3) の両辺の各成分が等しく，

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} N_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} N_3 \right) dudv = \oint_{\overline{C}} F_1\, dx, \tag{4}$$

$$\iint_R \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z} N_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x} N_3 \right) dudv = \oint_{\overline{C}} F_2\, dy, \tag{5}$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} N_1 - \frac{\partial F_3}{\partial x} N_2 \right) dudv = \oint_{\overline{C}} F_3\, dz \tag{6}$$

ならば，明らかに公式 (2) がなりたつ．まず，

$$z = f(x, y), \tag{7a}$$

$$y = g(x, z), \tag{7b}$$

$$x = h(y, z) \tag{7c}$$

によって同時に表される曲面 S に対して証明を行う．式 (4) の証明には式 (7a) を使う．$u = x$, $v = y$ とおくと，式 (7a) から

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(x, y) = [\,x, y, f(x, y)\,] = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f\boldsymbol{k},$$

また 4.6 節の式 (2) から

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = [\,-f_x, -f_y, 1\,] = -f_x\boldsymbol{i} - f_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

が得られる．$\boldsymbol{N}$ は正の z 成分をもっているので，S の上向きの法線ベクトルである．R は S の xy 平面への射影 S^* に等しく，図 4.35 のように境界曲線 $\overline{C} = C^*$ をもつ．そのため，式 (4) の左辺は

$$\iint_{S^*} \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}(-f_y) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dxdy \tag{8}$$

と書ける．つぎに式 (4) の右辺について考察する．これは $\overline{C} = C^*$ に関する線積分であるから，グリーンの定理 (4.4 節の公式 (1) で $F_2 = 0$ とした場合) を適用して S^* に関する 2 重積分に変換すれば，

$$\oint_{C^*} F_1\, dx = \iint_{S^*} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

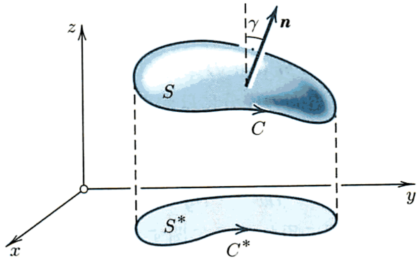


図 4.35　ストークスの定理の証明

となる．ただし $F_1 = F_1(x, y, f(x, y))$ である．ゆえに，連鎖法則 (3.8 節の問題 10 も参照) により

$$-\frac{\partial F_1(x, y, f(x, y))}{\partial y} = -\frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (z = f(x, y))$$

を得る．この積分の右辺は式 (8) の被積分関数に等しい．したがって，式 (4) が証明されたことになる．関係式 (5) および (6) も，それぞれ式 (7b), (7c) を用いて，まったく同様に導くことができる．これらの 3 つの式 (4), (5), (6) を加え合わせたものが公式 (3) である．これで，式 (7a), (7b), (7c) によって同時に表される曲面 S に対してストークスの定理が証明された．

発散定理の証明でも述べたように，われわれの結果はただちに，曲面 S が有限個の部分に分割され，そのおのおのの部分が上記の性質をもつ場合に拡張される．定理の仮定を満たすもっとも一般的な曲面 S の場合の証明には，ある種の極限操作が必要になってくるが，これも 4.4 節のグリーンの定理の場合と同様である． ◀

例 2　ストークスの定理の特別な場合としてのグリーンの定理　$\boldsymbol{F} = [F_1,\ F_2] = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j}$ は，単連結で有界な閉領域 S を含む xy 平面上のある領域において連続微分可能なベクトル関数であり，S の境界 C は区分的に滑らかな単純閉曲線であるとする．そのとき，式 (1) によれば，

$$(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = (\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

したがって，ストークスの定理はつぎの形をとる．

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy).$$

これは平面におけるグリーンの定理 (4.4 節) がストークスの定理 (その証明にはグリーンの定理が必要) の特別な場合であることを示す． ◀

例 3　ストークスの定理による線積分の計算　C が原点上に立った観測者から見て反時計まわりに向きづけられた円 $x^2 + y^2 = 4$，$z = -3$ であって，右手系のデカルト座標に関して

$$\boldsymbol{F} = [\,y, xz^3, -zy^3\,] = y\boldsymbol{i} + xz^3\boldsymbol{j} - zy^3\boldsymbol{k}$$

で与えられるとき，$\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'\,ds$ の値を求めよ．

［解］　C に囲まれた曲面 S として平面 $z = -3$ 上の円板 $x^2 + y^2 \leqq 4$ をとることができる．ストークスの定理における $\boldsymbol{n}$ は正の z 方向を向くので $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ となる．よって，$(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}$ は $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F}$ の正の z 方向の成分にほかならない．$z = -3$ のときの $\boldsymbol{F}$ の成分は $F_1 = y$，$F_2 = -27x$，$F_3 = 3y^3$ であるから，

$$(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28.$$

したがって，ストークスの定理に現れる S に関する積分は円板 S の面積 4π の -28 倍に等しい．これから $-28 \cdot 4\pi = -112\pi \approx -352$ という答えが出る．この結果を線積分の直接計算 (はるかに多い計算量が必要) によって確かめよ． ◀

例 4 回転の物理的解釈，循環 S_r を円 C_r に囲まれた半径 r，中心 P の円板 (図 4.36)，$\boldsymbol{F}(Q) \equiv \boldsymbol{F}(x, y, z)$ を S_r を含む領域で連続微分可能なベクトル関数とせよ．すると，ストークスの定理と面積分の平均値定理から，

$$\oint_{C_r} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}' \, ds = \iint_{S_r} (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, dA = (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}(P^*) A_r$$

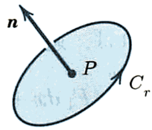


図 4.36 例 4

が得られる．ただし，A_r は S_r の面積であり，P^* は S_r の適当な点である．これはつぎのような形に書ける．

$$(\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}(P^*) = \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}' \, ds.$$

速度ベクトル $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}$ の流体の運動の場合には，

$$\oint_{C_r} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}' \, ds$$

を C_r に沿った**循環**とよぶ．これは流体の運動がどの程度まで円 C_r に沿った回転であるかについての尺度を与える．ここで r を 0 に近づければ，

$$(\operatorname{curl} \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}(P) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \oint_{C} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}' \, ds \tag{9}$$

を得る．すなわち，ベクトルの回転の正の法線方向の成分は，対応する点における曲面中の流れの**比循環** (単位面積あたりの循環) とみなすことができる． ◀

例 5 閉曲線に沿った変位でなされる仕事 力 $\boldsymbol{F} = 2xy^3 \sin z \, \boldsymbol{i} + 3x^2y^2 \sin z \, \boldsymbol{j} + x^2y^3 \cos z \, \boldsymbol{k}$ が，円柱 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ と放物面 $z = x^2 + y^2$ との交線に沿う変位でする仕事を求めよ．

[解] この仕事はストークスの定理の中の線積分によって与えられる．いま，$f = x^2y^3 \sin z$ とおけば $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$ と書けるので，$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = \boldsymbol{0}$ (3.11 節の式 (3)) すなわち $(\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ となる．したがって，ストークスの定理により仕事は 0 である． ◀

ストークスの定理と積分路に対する独立性

すでに 4.2 節で説明し強調したように，線積分の値は一般に被積分関数や積分路の 2 つの端点 A, B だけでなく，A から B への道の選び方にも依存する．4.2 節の定理 3 では，線積分

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz) \tag{10}$$

(成分 F_1, F_2, F_3 は連続な 1 階偏導関数をもつ) がある領域 D で積分路に無関係ならば，

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

であることを証明した．逆もまた真であって，式 (11) が成立すれば，D が単連結である限り積分 (10) が D において道に無関係であることも主張された．

逆の証明にはストークスの定理が必要である．実際には証明はつぎのように行われる．C を D における単純閉曲線とする．D は単連結であるから，D の中に C に囲まれた1つの曲面 S を定めることができる．ストークスの定理を適用すれば，適当な C の向きと S の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して

$$\oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,dA$$

が得られる．S に関する面積分は，その被積分関数が式 (11) により恒等的に0なので，C の選び方にかかわらず0である．これと4.2節の定理2から，積分 (10) は D 内の積分路によらないことがわかる．これで証明が完結する．

❖❖❖❖❖ 問題 4.9 ❖❖❖❖❖

面積分 $\iint_S (\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,dA$ の直接計算とストークスの定理の検証　面積分を直接積分により計算せよ．その結果を式 (2) の対応する線積分を計算して確かめよ．(計算の詳細を示せ.)

1. $\boldsymbol{F} = [z^2, 5x, 0]$,　S： 正方形 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ z = 1$

2. $\boldsymbol{F} = [y^2, -x^2, 0]$,　S： 半円板 $x^2 + y^2 \leqq 4,\ y \geqq 0,\ z = 0$

3. $\boldsymbol{F} = [e^z, e^z \sin y, e^z \cos y]$,　S： $z = y^2,\ 0 \leqq x \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq 2$

4. $\boldsymbol{F} = [0, 0, x\cos 2z]$,　S：$x^2 + y^2 = 1,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq z \leqq \pi/4$

5. $\boldsymbol{F} = [y^2, z^2, x^2]$,　S： 放物面の部分 $x^2 + y^2 = z,\ y \geqq 0,\ z \leqq 1$

6. $\boldsymbol{F}$ は問題5と同じ，S： 球の部分 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ y \geqq 0,\ z \leqq 1$

ストークスの定理による線積分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'(s)\,ds$ の計算 (原点上に立った観測者から見て時計まわり)．つぎの C と $\boldsymbol{F}$ に対する (右手系のデカルト座標に関する) 線積分をストークスの定理により計算せよ．(詳細を述べよ.)

7. $\boldsymbol{F} = [-5y, 4x, z]$,　C： 円 $x^2 + y^2 = 4,\ z = 1$

8. $\boldsymbol{F} = [2y^2, x, -z^3]$,　C： 円 $x^2 + y^2 = a^2,\ z = b\ (> 0)$

9. $\boldsymbol{F} = [4z, -2x, 2x]$,　C： 楕円 $x^2 + y^2 = 1,\ z = y + 1$

10. $\boldsymbol{F} = [y, \frac{1}{2}z, \frac{3}{2}y]$,　C： 円 $x^2 + y^2 + z^2 = 6z,\ z = x + 3$

11. $\boldsymbol{F} = [0, xyz, 0]$,　C： 頂点が $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ である3角形の境界

12. $\boldsymbol{F} = [x^4, y^4, z^4]$,　C：$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と $z = y^2$ との交わり．

13. $\boldsymbol{F} = [y^3, 0, x^3]$,　C は問題11と同じ．

14. (ストークスの定理が適用できない場合)　$\boldsymbol{F} = (x^2 + y^2)^{-1}[-y, x, 0]$ のとき $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'\,ds$ を計算せよ．C は円 $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ で，時計まわりに向きづけられているとする．ストークスの定理が適用できないのはなぜか．

15. [論文プロジェクト]　**積分に関連した勾配，発散，回転**　本章の内容を注意深く検討して，標記の主題と結果をまとめたリストをつくれ．ある課題を並びかえたり組み

合わせたりして，リストを改良できないかどうかを調べよ．また，どのようにして全リストを 3 ないし 5 程度の部門に分類できるかを示せ．さらに，各課題の核心を解説しつつり合いのとれた小論文を書け．証明はつけなくてよいが，理解を助けると実感できるような典型的な実例をあげよ．

4 章の復習

1. 線積分はどのようにして計算できるのか記憶だけで述べよ．

2. 線積分は定積分のどのような一般化であるか説明せよ．

3. 線積分の積分路に対する独立性とは何を意味するか．なぜこれは実際に重要か．これは物理的には何を意味するか．

4. 本章で論じた積分の種類をまとめたリストをつくれ．

5. どのようにして線積分を面積分に変換できるか．変換のための条件を述べよ．

6. 面積分はどのようにして体積積分に変換されるか．

7. 勾配は本章でどんな役割を果たすか．

8. 発散はどのように定義されるか．また本章ではどのように使われたか．

9. ストークスの定理では，なぜ右手系，左手系のどちらの座標を使ったかが本質的なのか．

10. 線積分の典型的な応用は何か．面積分についてはどうか．

11. 曲面の向きは面積分に関連して重要な役割を果たした．これを説明せよ．

12. 滑らかな曲面とは何か．区分的に滑らかな曲面とは何か．例をあげよ．これらの概念はなぜ必要か．

13. ラプラスの方程式について述べよ．これはなぜ物理学で重要か．

14. 調和関数に関する本章の議論を要約せよ．

15. 線積分および面積分においてはベクトル関数 $\boldsymbol{F}$ を使ったが，被積分関数は実際にはスカラー関数であった．一見遠まわりのように感じられるが，なぜこのようにしたのだろうか．

線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$：力による仕事　つぎの問題 16–30 のように $\boldsymbol{F}$ と C を与えて，もっとも適当と思われる方法 (直接積分のほか完全微分性，グリーンの定理，ストークスの定理などの利用) により線積分を計算せよ．

16. $\boldsymbol{F}=[x^2, -2y^2]$,　C： $(4,2)$ から $(-3,5)$ までの線分

17. $\boldsymbol{F}=[y\cos xy, x\cos xy, e^z]$,　C： $(\pi,1,0)$ から $(\frac{1}{2},\pi,1)$ までの線分

18. $\boldsymbol{F}=[xy, z, 0]$,　$C: y=2x^2,\ z=x$,　$(1,2,1)$ から $(2,8,2)$ まで

19. $\boldsymbol{F}=[y^2, 2xy+\sin x, 0]$,　$C: 0\leqq x\leqq \pi/2,\ 0\leqq y\leqq 2,\ z=0$ の境界

20. $\boldsymbol{F}=[-y^3, x^3+e^y, 0]$,　C： 円 $x^2+y^2=4,\ z=0$

21. $\boldsymbol{F}=[\cos\pi y, \sin\pi x, \cos\pi x]$,　$C: 0\leqq x\leqq \frac{1}{2},\ 0\leqq y\leqq 4,\ z=x$ の境界

22. $\boldsymbol{F}=[-z, 5x, -y]$,　C： 楕円 $x^2+y^2=4,\ z=x+2$

23. $\boldsymbol{F} = [8xy, 4x^2, 2\cos 2z]$, C：円らせん $\boldsymbol{r} = [\cos t, \sin t, t]$, $0 \leqq t \leqq \pi/4$

24. $\boldsymbol{F} = [ze^{xz}, 2\sinh 2y, xe^{xz}]$, C：放物線 $y = x$, $z = x^2$, $-1 \leqq x \leqq 1$

25. $\boldsymbol{F} = [e^x, e^y, e^z]$, $C : x = \ln y$, $z = \ln y$, $1 \leqq y \leqq 2$

26. $\boldsymbol{F} = [x \ln y, 2ye^x, 0]$, C：長方形 $0 \leqq x \leqq 2$, $1 \leqq y \leqq 2$, $z = 0$ の境界

27. $\boldsymbol{F} = [x^3, e^{3y}, e^{-3z}]$, $C : x^2 + 9y^2 = 9$, $z = x^2$

28. $\boldsymbol{F} = [\cosh y, xy^2, z]$, $C : \boldsymbol{r} = [t, 3t, t^2]$, $0 \leqq t \leqq 1$

29. $\boldsymbol{F} = [\sin \pi x, z, 0]$, C：頂点 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ の 3 角形の境界

30. $\boldsymbol{F} = [x^2, y^2, y^2 x]$, C：円らせん $\boldsymbol{r} = [\cos t, \sin t, 3t]$, $0 \leqq t \leqq \pi/2$

2 重積分：重心　領域 R における密度 $f(x, y)$ の質量分布の重心の座標 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ．これは 2 重積分の計算である．詳細を示せ．R を図示せよ．

31. $f = xy$, $R : 0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x$

32. $f = x^2 y$, $R : -1 \leqq x \leqq 1$, $x^2 \leqq y \leqq 1$

33. $f = 1$, $R : 1 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq \ln x$

34. $f = 1$, $R : x^2 + y^2 \leqq a^2$, $y \geqq 0$

35. $f = x^2$, $R : -1 \leqq x \leqq 2$, $x^2 \leqq y \leqq x + 2$

36. $f = x^2 + y^2$, $R : x^2 + y^2 \leqq a^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$

面積分 $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA$：発散定理　直接または可能ならば発散定理を用いて積分を計算せよ．(詳細を述べよ．)

37. $\boldsymbol{F} = [x, y]$, $S : z = 2x + 5y$, $0 \leqq x \leqq 2$, $-1 \leqq y \leqq 1$

38. $\boldsymbol{F} = [\sin x, z, y]$, $S : y^2 + z^2 = 4$, $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$

39. $\boldsymbol{F} = [0, 20y, 2z^3]$, $S : 0 \leqq x \leqq 6$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq y$ の境界面

40. $\boldsymbol{F} = [x^3, y^3, z^3]$, S：球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

41. $\boldsymbol{F} = [0, x^2, -xz]$, $S : \boldsymbol{r} = [u, u^2, v]$, $0 \leqq u \leqq 1$, $-2 \leqq v \leqq 2$

42. $\boldsymbol{F} = [e^y, 0, ze^x]$, $S : \boldsymbol{r} = [u, 2u, v]$, $-1 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 3$

43. $\boldsymbol{F} = [1, 1, 1]$, $S : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $z \geqq 0$

44. $\boldsymbol{F} = [y^2, x^2, z^2]$, S：円柱 $x^2 + y^2 \leqq 4$, $0 \leqq z \leqq 2$ の境界面

45. $\boldsymbol{F} = [x + z, y + z, x + y]$, S：球 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

4 章のまとめ

> 3 章では微分法をベクトルすなわちベクトル関数 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ や $\boldsymbol{v}(t)$ に拡張した．4 章では積分法をベクトル関数に拡張する．これは線積分 (4.1 節)，2 重積分 (4.3 節)，面積分 (4.6 節) およびこれらの積分を互いに変換する 3 つの "大" 定理，すなわちグリーン (4.4 節)，ガウス (4.7 節)，ストークス (4.9 節) の諸定理を含んでいる．

微分積分学における定積分に対応する積分は**線積分**

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt \qquad (1)$$

である．$C : \boldsymbol{r}(t) = [\,x(t), y(t), z(t)\,] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ $(a \leqq t \leqq b)$ は空間または平面における曲線である．物理的には，式 (1) は変位において力のする仕事を表す．ほかの種類の線積分とその応用も 4.1 節で論じられている．

線積分が領域 D で**積分路に無関係**とは，固定された端点 P, Q の任意の経路 C に関する与えられた関数の積分が，P から Q に至る D の中のすべての積分路に対して同じ値をとることを意味する．積分 (1) は微分形式 $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ が D において完全微分であるとき，またそのときに限り D における積分路に無関係である (4.2 節)．さらに，$\boldsymbol{F} = [\,F_1, F_2, F_3\,]$ が単連結領域 D において連続な 1 階偏導関数をもつときには，$\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ならば積分 (1) は D における積分路に無関係である (4.2 節)．

平面上の領域 R に関する **2 重積分** (4.3 節) と R の境界 C に関する線積分とは，**平面におけるグリーンの定理** (4.4 節)

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy) \qquad (2)$$

によって互いに変換される．この公式のほかの形式も 4.4 節に与えられている．グリーンの定理はまたストークスの定理を証明するための本質的な手段として役だち，しかもストークスの定理の特別な場合に相当する．

空間の領域 T に関する **3 重積分** (4.7 節) は，**ガウスの発散定理** (4.7 節)

$$\iiint_T \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dV = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dA \qquad (3)$$

を用いて T の境界面に関する面積分に変換され，その逆もなりたつ．とくにこの定理からつぎの**グリーンの公式** (4.8 節) が導かれる．

$$\iiint_T (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dV = \iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dA, \qquad (4)$$

$$\iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dA. \qquad (5)$$

境界曲線 C をもつ曲面 S に関する面積分は**ストークスの定理** (4.9 節)

$$\iint_S (\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,dA = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'(s)\,ds \qquad (6)$$

により C に関する線積分に変換され，その逆もいえる．

付録 1

参 考 文 献

数 学 一 般

[1] Abramowitz, M. and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions.* 10th printing, with corrections. Washington, DC: National Bureau of Standards, 1972. (Also New York: Dover, 1965.)

[2] Cajori, F., *A History of Mathematics.* 3rd ed. New York: Chelsea, 1980.

[3] *CRC Handbook of Mathematical Sciences.* 6th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1987.

[4] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.* 2 vols. New York: Wiley-Interscience, 1989.

[5] Courant, R., *Differential and Integral Calculus.* 2 vols. New York: Wiley, 1988.

[6] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions.* 3 vols. New York: McGraw-Hill, 1953, 1955.

[7] Graham, R. L., D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics.* 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

[8] Itô, K. (ed.), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics.* 4 vols. 2nd ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1987[1).

[9] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Wiley, 1989.

[10] Kreyszig, E., *Differential Geometry.* Mineola, NY: Dover, 1991.

[11] Magnus, W., F. Oberhettinger and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.* 3rd ed. New York: Springer, 1966.

[12] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials.* 4th ed. New York: American Mathematical Society, 1975. (9th printing 1995.)

[13] Thomas, G. B. and R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry.* 9th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1996.

1) (訳注) 日本数学会編，岩波数学辞典 第 3 版，岩波書店，1985 の英語版.

B. 線形代数とベクトル解析

[B1] Chatelin, F., *Eigenvalues of Matrices.* New York: Wiley-Interscience, 1993.

[B2] Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices.* 2 vols., 2nd ed. New York: Chelsea, 1990, 2000.

[B3] Gohberg, I., P. Lancaster and L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications.* New York: Wiley, 1986.

[B4] Herstein, I. N., *Topics in Algebra.* 2nd ed. Lexington, MA: Xerox College Publishing, 1975.

[B5] Lang, S., *Linear Algebra.* 3rd ed. New York: Springer, 1987.

[B6] MacDuffee, C. C., *The Theory of Matrices.* New York: Chelsea, 1946.

[B7] Nef, W., *Linear Algebra.* 2nd ed. New York: Dover, 1988.

[B8] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem.* Oxford: Clarendon, 1965.

付録 2

奇数番号の問題の解答

問題 1.1

1. $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$, 無定義

3. 無定義, $\boldsymbol{C}$, 無定義

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -29 \\ -18 & 20 & 60 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -18 \\ 0 & 20 \\ -29 & 60 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{0}$

9. $[26 \quad -40 \quad 18]$, $[26 \quad -40 \quad 18]^T$

11. $[3 \quad 39 \quad -51]$, $[3 \quad 39 \quad -51]$

13. $[25 \quad 45 \quad -25]^T$, $[-25 \quad -45 \quad 25]^T$

15. $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{0}$, 無定義

19. (b) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^T) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^T)$

問題 1.2

1. 無定義, $[2 \quad 8]$, 無定義

3. $\begin{bmatrix} 56 & 30 & 24 \\ 30 & 45 & 9 \\ 24 & 9 & 14 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}^2$, $\boldsymbol{C}^2$

5. 無定義, 16, 16, $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 16 & 12 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 13 & -6 & -3 \\ -6 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 26 & -54 \\ -12 & 28 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 24 & 9 & 10 \\ 9 & 22.5 & 1.5 \\ 10 & 1.5 & 8 \end{bmatrix}$, 同, $\mathbf{0}$

11. $\boldsymbol{p} = [85 \quad 62 \quad 30]^T$

13. $[0.5 \quad 0.5]$, $[0.35 \quad 0.65]$, $[0.305 \quad 0.695]$, $[0.2915 \quad 0.7085]$

問題 1.3

1. $x = -3,\ y = 5$

3. $x = 0.4,\ y = 1.2$

5. $x = 1,\ y = 3,\ z = -5$

7. $x = 6,\ y = -7$

9. 解なし

11. $x = 0,\ z = 3 - 2y$

13. $w = 1,\ y = 2z - x$

15. $w = 4,\ x = 0,\ y = 2,\ z = 6$

17. $I_1 = 2,\ I_2 = 6,\ I_3 = 8$

19. $I_1 = (R_1 + R_2)E_0/R_1R_2,\ I_2 = E_0/R_1,\ I_3 = E_0/R_2$ [A]

21. $x_2 = 1600 - x_1,\ x_3 = 600 + x_1,\ x_4 = 1000 - x_1$, 否

問題 1.4

1. 1 次独立　**3.** 1 次従属　**5.** 1 次従属　**7.** 1 次独立　**9.** 1

11. 2　**13.** 2　**15.** 2　**17.** 4　**19.** 2, $[3\ \ 0\ \ -2]$, $[0\ \ 1\ \ 0]$

21. 否　**23.** 1, 1　**25.** 否

29. たとえば, $[3\ \ 1\ \ 4]$, $[0\ \ 5\ \ 8]$ および $[1\ \ 0\ \ -1\ \ \frac{1}{3}]^T$, $[1\ \ 2\ \ 1\ \ 1]^T$.

問題 1.6

5. 36.18　**7.** 0　**9.** $m^2 + n^3 + p^3 - 3mnp$　**11.** -477　**13.** 72

15. 3　**17.** $x = 5,\ y = -4$　**19.** $x = -7,\ y = 0,\ z = 1$

問題 1.7

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$　**3.** 特異行列　**5.** $\begin{bmatrix} 29 & -11 & 10 \\ -160 & 61 & -55 \\ 55 & -21 & 19 \end{bmatrix}$

7. $\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$　**9.** $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 31 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. 問題 5 の行列は問題 1 の行列の 2 乗であることに着目せよ.

13. 問題 12 を使え.

15. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$　**17.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　**19.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

問題 1.8

1. 次元 2, 基底 $[3\ \ 1\ \ 0]$, $[2\ \ 0\ \ -1]$　**3.** 次元 4, 基底 $1,\ x,\ x^2,\ x^3$

5. 次元 1, 基底 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$　**7.** 次元 3, 基底 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

9. 否　**11.** たとえば, $[1\ \ 0]$ と $[0\ \ 1]$, $[1\ \ 1]$ と $[1\ \ -1]$, $[1\ \ 0]$ と $[0\ \ -1]$.

13. 2.58650　**15.** $\sqrt{13/18}$

17. $\sqrt{33}$　**21.** $[v_1\ \ -v_1/2\ \ v_3]$ (v_1, v_3任意), 正

23. $\|[2.4\ \ 4.3\ \ -7.2]^T\| = \sqrt{76.09} = 8.72 \leqq \sqrt{6.69} + \sqrt{38} = 8.75$

25. $\begin{cases} x_1 = -0.2y_1 + 0.4y_2, \\ x_2 = \ \ \ 0.8y_1 - 0.6y_2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = -10y_1 + 16y_2 + y_3, \\ x_3 = -7y_1 + 11y_2 + y_3 \end{cases}$　**29.** $\begin{cases} x_1 = 4y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ x_2 = -2y_1 - 4y_2 + 4y_3, \\ x_3 = -4y_1 + 2y_2 + 8y_3 \end{cases}$

1 章の復習

11. $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -18 & 8 & -7 \\ -13 & -2 & -7 \end{bmatrix}$　**13.** $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$　**15.** $\begin{bmatrix} -17 & 2 & -8 \\ 2 & -20 & -4 \\ -8 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 17 & -2 & 8 \\ -2 & 20 & 4 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$　**19.** $\begin{bmatrix} 21 \\ -8 \\ -31 \end{bmatrix}$　**21.** -1

23. $[2.1 \quad -0.8 \quad -3.1]$　**25.** 0

27. $x = 3,\ y = 2z + 1$　**29.** $x = 0.4,\ y = -1.3,\ z = 1.7$

31. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$　**33.** $x = 9,\ y = -9,\ z = 1$

35. 2, 2　**37.** 3, 3　**39.** 3, 3

41. $\begin{bmatrix} -16 & 11 & -14 \\ 11 & -6 & 9 \\ -14 & 9 & -11 \end{bmatrix}$　**43.** 存在しない.　**45.** $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 7 & 10 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

47. $I_1 = 16.5,\ I_2 = 11,\ I_3 = 5.5$ [A]

49. $i_1 = i_2$ から抵抗器による電圧降下は $Zi_1 = Zi_2$ である (オームの法則). したがって $u_1 = u_2 + Zi_2$, $i_1 = i_2$ となり, 与えられた行列 T が得られる.

問題 2.1

1. $4,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ -6,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　**3.** $-8,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix},\ 6,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　**5.** $-5,\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ 5,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $1,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ 3,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　**9.** $3,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ -8,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ 4,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $1,\ \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix},\ 3,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ 4,\ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　**13.** $\frac{1}{2},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ 3,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, (a) $1,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, (b) $-1,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(a) x 軸上の任意の点がそれ自身に写像される. (b) y 軸上の任意の点 $(0, y)$ が $(0, -y)$ に写像される. このとき, $[0 \quad y]^T$ は $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルである.

17. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. 固有値は $\lambda = 4$ で固有ベクトルは任意のベクトルである. これはすべての方向において一様な膨張を表す.

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，1，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，0，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$．$y$ 軸上の点はそれ自身に，x 軸上の点は原点に写像される．

問題 2.2

1. $-35.26°$，2；$54.74°$，8　**3.** $-45°$，1.5；$45°$，4.5

5. $-54.74°$，0.5；$35.26°$，2　**7.** $[\frac{5}{13} \quad \frac{8}{13}]^T$

9. $[\frac{2}{11} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{6}{11}]^T$　**11.** 1.5

13. $c[10 \quad 18 \quad 25]^T \ (c > 0)$　**15.** $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y} = [0.55 \quad 0.64375 \quad 0.6875]^T$

問題 2.3

1. 直交行列，$0.96 \pm 0.28i$　**3.** 交代行列でもない，$1 \pm 4i$

5. 交代行列，$\pm 25i$，0　**7.** $a_{jj} = -a_{jj}$ から $a_{jj} = 0$ が導ける．

9. x 軸のまわりの回転．　**11.** $\boldsymbol{A}^{-1} = (-\boldsymbol{A}^T)^{-1} = -(\boldsymbol{A}^{-1})^T$

13. $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$ で $n = 3$ ならば，$\det \boldsymbol{A} = 0$ であるから存在しない．

問題 2.4

3. $[2+i \quad i]^T$，$[2+i \quad -5i]^T$

5. エルミート行列，-3，$[-3-4i \quad 5]^T$，7，$[3+4i \quad 5]^T$

7. ユニタリ行列，$1/2 - i\sqrt{3/4}$，$[1 \quad -1]^T$，$1/2 + i\sqrt{3/4}$，$[1 \quad 1]^T$

9. 歪エルミート行列かつユニタリ行列，$-i$，$[0 \quad -1 \quad 1]^T$，i，$[0 \quad 1 \quad 1]^T$，$[1 \quad 0 \quad 0]^T$

11. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \overline{\boldsymbol{A}}^T)$，$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \overline{\boldsymbol{A}}^T)$

13. $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$　**15.** $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0 & -0.7 \\ 0 & -0.7 & 0 \end{bmatrix}$　**17.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

21. エルミート行列，4　**23.** 歪エルミート行列，$17i$　**25.** 歪エルミート行列，$16i$

問題 2.5

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{7}{3} & 5 \end{bmatrix}$；0，$\begin{bmatrix} 15 \\ -7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$；5，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -25 & 12 \\ -50 & 25 \end{bmatrix}$；$-5$，$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$；5，$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 355 & -42 & 560 \\ 0 & 1 & 0 \\ -225 & 27 & -355 \end{bmatrix}$；$-5$，$\begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$；1，$\begin{bmatrix} -14 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$；5，$\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $[1/\sqrt{2}\quad -i/\sqrt{2}]^T,\ [1/\sqrt{2}\quad i/\sqrt{2}]^T$　**9.** $[1/\sqrt{2}\quad i/\sqrt{2}]^T,\ [1/\sqrt{2}\quad -i/\sqrt{2}]^T$

11. $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}$　**13.** $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}16&0&0\\0&-8&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}15&0&0\\0&0&0\\0&0&-15\end{bmatrix}$

17. 楕円 $4{y_1}^2+10{y_2}^2=200,\ x_1=(y_1+y_2)/\sqrt{2},\ x_2=(-y_1+y_2)/\sqrt{2}$

19. 直線 $y_2=\pm 2,\ x_1=(y_1+3y_2)/\sqrt{10},\ x_2=(3y_1-y_2)/\sqrt{10}$

22. 双曲線 ${y_1}^2-4{y_2}^2=4,\ x_1=(2y_1+3y_2)/\sqrt{13},\ x_2=(3y_1-2y_2)/\sqrt{13}$

2 章の復習

11. $3,\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};\ 2,\ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$　**13.** $\frac{1}{2},\ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};\ -\frac{1}{4},\ \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

15. $2,\ \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix};\ -2,\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\ 1,\ \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$　**17.** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}7&0\\0&3\end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&-12\end{bmatrix}$

21. 楕円 $8{y_1}^2+18{y_2}^2=72,\ x_1=(3y_1+y_2)/\sqrt{10},\ x_2=(y_1-3y_2)/\sqrt{10}$

23. 楕円 ${y_1}^2+9{y_2}^2=9,\ x_1=(y_1+2y_2)/\sqrt{5},\ x_2=(-2y_1+y_2)/\sqrt{5}$

問題 3.1

1. $3,\ 4,\ 0;\ 5$　**3.** $1,\ 2,\ 3;\ \sqrt{14}$　**5.** $-4,\ 4,\ 0;\ \sqrt{32}$

7. $0,\ -18,\ 0;\ 18$　**9.** $(3,\ 3,\ 0);\ \sqrt{13}$　**11.** $(0,\ 0,\ 0);\ \sqrt{74}$

13. $(\frac{5}{4},\ 1,\ -\frac{9}{2});\ \frac{3}{4}$　**15.** $[7,\ -1,\ 0]$　**17.** $[7,\ 2,\ 0]$

19. $[44,\ 0,\ -4]$　**21.** $[18,\ -48,\ 6]$　**25.** $\mathbf{0}$

27. $[-6,\ -10,\ -14];\ \sqrt{332}$　**29.** $[-1,\ -6,\ 0]$　**31.** $p_3=-17$

33. $|\boldsymbol{w}|/(2\sin\alpha)$

問題 3.2

1. -8　**3.** $4\sqrt{14},\ \sqrt{59}$　**5.** 30

7. $-22,\ 22$　**9.** $-8,\ -8\boldsymbol{c}$　**13.** 28

15. 0　**19.** $19.1°$　**21.** $38.0°$

23. $18.4°$　**25.** $22.2°$　**27.** $55.15°,\ 62.425°,\ 62.425°$

29. $54.6°,\ 125.4°$　**31.** $1/\sqrt{3}$　**33.** $-14/\sqrt{20}$

35. 4.6

問題 3.3

1. $8\boldsymbol{k},\ -8\boldsymbol{k},\ 1,\ 1$　**3.** $[8,\ -4,\ -1],\ 9,\ 9,\ 8$　**5.** $120\boldsymbol{k}$

7. $[16,\ 8,\ -14]$　**9.** $[-24,\ 16,\ 0],\ [-26,\ 13,\ -4]$

11. $\boldsymbol{c},\ 32$　**13.** $1,\ -1$　**15.** $-256,\ -256$

17. $-16,\ 16$　**21.** $[72,\ 0,\ -27],\ \sqrt{5913}$　**23.** $[-20,\ 20,\ 0]$

25. $[42,\ -9,\ 21]$　**27.** $\sqrt{4014}$　**29.** $\sqrt{3081}/2$

31. $\frac{27}{2}x - 9y + 18z = 0$　**33.** 50　**35.** 79

37. 1 次従属

問題 3.4

1. 100, 44.5, 153.667

3. 2 つの楕円 $x^2/4 + y^2/9 = 1$ と $x^2/16 + y^2/36 = 1$ の間の領域

5. $y/x = c$, 直線　**7.** 双曲線　**9.** 円

11. 平面　**13.** 楕円面　**15.** 円錐

25. $[0,\ 0,\ 2x],\ [2y,\ 0,\ 0],\ [0,\ 2z,\ 0]$

27. $[y,\ 0,\ z],\ [x,\ z,\ 0],\ [0,\ y,\ x]$

29. $[-\sin x \cosh y,\ -\cos x \sinh y],\ [\cos x \sinh y,\ -\sin x \cosh y]$

問題 3.5

1. $(4+t)\boldsymbol{i} + (2+t)\boldsymbol{j}$　**3.** $[3+4t,\ 1+7t,\ 5-t]$

5. $[2+3t,\ 3-4t,\ 0]$　**7.** $[1+2t,\ 2,\ 3-3t]$

9. $y = x^3 + 2,\ z = 0$　**11.** yz 平面上の円

13. 双曲線 $x^2 - y^2 = 1,\ z = 0$　**15.** 反時計まわり, $t = -\tilde{t}$

17. $[0,\ 3\cos t,\ 3 + 3\sin t]$　**19.** 楕円 $[\cos t,\ \sin t,\ \sin t]$

21. (a) $\boldsymbol{r}' = [1,\ 3t^2,\ 0],\ \boldsymbol{u} = (9t^4+1)^{-1/2}\boldsymbol{r}'$
(b) $[1,\ 3,\ 0],\ [1/\sqrt{10},\ 3/\sqrt{10},\ 0]$　(c) $[1+w,\ 1+3w,\ 0]$

23. (a) $\boldsymbol{r}' = [-\sin t,\ 2\cos t,\ 0],\ (\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{-1/2}\boldsymbol{r}'$
(b) $[-\sqrt{3}/2,\ 1,\ 0],\ [-\sqrt{3/7},\ \sqrt{4/7},\ 0]$　(c) $[1/2 - w\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3} + w,\ 0]$

25. (a) $\boldsymbol{r}' = \sinh t\,\boldsymbol{i} + \cosh t\,\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u} = (\sinh^2 t + \cosh^2 t)^{-1/2}\boldsymbol{r}'$
(b) $[\frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 0],\ [4/\sqrt{41},\ 5/\sqrt{41},\ 0]$　(c) $\frac{1}{3}[5+4w,\ 4+5w,\ 0]$

27. $\sinh 1 = 1.175$　**29.** $8(\sqrt{1000} - 1)/27 = 9.073$

31. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}$ から出発せよ.

問題 3.6

1. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

3. $\boldsymbol{a} = 10\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_{\text{tan}},\ \boldsymbol{a}_{\text{norm}} = \boldsymbol{0}$

5. $\boldsymbol{a} = -b\cos t\,\boldsymbol{i} - b\sin t\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{a}_{\text{norm}},\ \boldsymbol{a}_{\text{tan}} = \boldsymbol{0}$, 円

7. $\boldsymbol{a} = e^t\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a}_{\text{tan}} = \tanh 2t\,(e^t\boldsymbol{i} - e^{-t}\boldsymbol{j})$, 双曲線 $xy = 1$

9. $\boldsymbol{v}(0) = 2\omega R\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{a}(0) = -\omega^2 R\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}(\pi/\omega) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}(\pi/\omega) = \omega^2 R\boldsymbol{j}$

11. $\boldsymbol{w} = \omega\boldsymbol{k} =$ 一定, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})' = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v} = \omega\boldsymbol{k}\times(\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}) = \omega^2\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})] = \omega^2\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}) = \omega^2(-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}$

13. 1 [年] $= 365 \cdot 86400$ [秒]，$R = 30 \cdot 365 \cdot 86400/2\pi = 151 \cdot 10^6$ [km]，$|\boldsymbol{a}| = \omega R = |\boldsymbol{v}|^2/R = 30^2/R = 5.98 \cdot 10^{-6}$ [km/s^2]

15. $R = 3960+80$ [マイル] $= 2.133 \cdot 10^7$ [フィート]，$g = |\boldsymbol{a}| = \omega R = |\boldsymbol{v}|^2/R$，$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{gR} = \sqrt{6.61 \cdot 10^8} = 25700$ [フィート/秒] $= 17500$ [マイル/時]

問題 3.7

3. $\boldsymbol{r}(t) = [t,\ y(t),\ 0]$，$\boldsymbol{r}' = [1,\ y',\ 0]$，$\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = 1 + y'^2$，$\boldsymbol{r}'' = [0,\ y'',\ 0]$ などを式 (1′) に代入せよ．

5. $2/(1+4x^2)^{3/2}$　**7.** $a/(a^2+c^2)$

9. $6/(\sqrt{t}(4+9t)^{3/2})$　**15.** $3/(1+9t^2+9t^4)$

問題 3.8

1. $4\sqrt{2}(\sinh 8t)/(\cosh 8t)^{1/2}$　**3.** $(\cos t)^{\sin t - 1}[\cos^2 t \ln(\cos t) - \sin^2 t]$

5. $-t(1+t^2)^{-3/2}$　**7.** $e^{2u}\sin 2v$，$e^{2u}\cos 2v$

9. $-(u^2+v^2)^{-3}u$，$-(u^2+v^2)^{-3}v$

問題 3.9

1. $[2x,\ -2y]$，$[-2,\ -6]$　**3.** $(x^2+y^2)^{-1}[2x,\ 2y]$，$[1,\ 0]$

5. $-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}[x,\ y,\ z]$，$-14^{-3/2}[2,\ 1,\ 3]$

7. $(x^2+y^2)^{-2}[2xz,\ 2yz,\ -x^2-y^2]$，$[0,\ 4,\ -1]$

9. $[\sin x \cosh y,\ -\cos x \sinh y]$，$[\cosh 1,\ 0]$

11. $[-1/y,\ x/y^2]$，$[1,\ 8]$　**15.** $[0.8,\ -0.6]$　**17.** $[0.6,\ 0.8]$

19. $(1/\sqrt{50})[3,\ 4,\ -5]$　**21.** $x^2+2y^2+4z^2$　**23.** なし

25. xy/z　**29.** $-2/\sqrt{5}$　**31.** $-7/(125\sqrt{3})$

33. $\frac{7}{3}$　**35.** $-2e^2/\sqrt{13}$

問題 3.10

1. 3　**3.** $2e^x \cos y$　**5.** 0　**7.** $2e^x$

9. (a) 平行な流れ，$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.　(b) x 方向 (左右) への流出，ほかの方向の流れはなく，$\operatorname{div} \boldsymbol{v} > 0$.　(c) x 方向への流出と y 方向への流入がつり合って $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$，など．

13. (b) $(fv_1)_x + (fv_2)_y + (fv_3)_z = f[(v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z] + f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3$ など．　(c) (b) で $\boldsymbol{v} = \nabla g$ とおけばよい．

15. 28　**17.** $2xy/z^3$　**19.** 0

問題 3.11

3. $[y-z,\ z-x,\ x-y]$　**5.** $\boldsymbol{0}$　**7.** $x(z^2-y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2-z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2-x^2)\boldsymbol{k}$

9. $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$，$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = [0,\ -3x^2,\ 0]$，$\boldsymbol{v} = [x',\ y',\ z'] = [0,\ 0,\ x^3]$，$x' = 0$，$x = c_1$，$y' = 0$，$y = c_2$，$z' = x^3 = {c_1}^3$，$z = {c_1}^3 t + c_3$

11. $\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{k}$，非圧縮性，$x' = y$，$y' = -x$，$x^2+y^2 = c_1$，$z = c_2$

13. $\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$，$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 1$，圧縮性，$\boldsymbol{r} = [c_1 e^t,\ c_2 e^t,\ c_3 e^{-t}]$

15. $[x^2 z - 2xyz,\ y^2 x - 2xyz,\ z^2 y - 2xyz]$

17. $\mathbf{0}$, $[xy - zx,\ yz - xy,\ zx - yz]$

19. $-xy - yz - zx$, 0

3 章の復習

15. $36\boldsymbol{k}$, $-36\boldsymbol{k}$　**17.** -24, 24　**19.** $[266,\ 182,\ -184]$

21. -1696, -1696　**23.** $[-5040,\ -3360,\ 3480]$

25. $\sqrt{270}$, $\sqrt{278} - \sqrt{52}$　**27.** $178.2°$　**29.** -12

31. $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ か $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が直交するとき　**35.** $7x - 8y + 6z = 5$

37. $[0,\ -5,\ 0]$　**39.** 1, $-2y$　**41.** 0

43. $[0,\ -2,\ 0]$　**45.** $-\frac{7}{11}$　**47.** $\mathbf{0}$

49. 0，なぜか．

問題 4.1

1. 4　**3.** $\frac{8}{5}$　**5.** $\frac{891}{64}$

7. 9π　**9.** $-1 - e^{-1} + 2e \approx 4.07$　**13.** $80\sqrt{10}/3$

15. $\sqrt{5}(4\pi + 256\pi^3/3) \approx 5944$　**17.** $2\sqrt{2}\pi$　**19.** $3\pi/8$

問題 4.2

3. 183　**5.** 25　**7.** $-2\sinh 2$

9. $\cosh 1 - 2$　**11.** 無関係，$a^2b^2 + c$　**13.** 依存

15. 依存　**17.** 無関係，$\sin(a + bc)$　**19.** 無関係，$ae^c + b^2$

問題 4.3

1. $\frac{160}{3}$　**3.** 54　**5.** $1 - 1/\sqrt{2}$

7. $\frac{1}{2}\sinh 4 - \sinh 2$　**9.** $e^{30} - 9e^5 - e^2 + e$　**11.** 144

13. $a^3/3$　**15.** $4a/3\pi$　**17.** $I_x = bh^3/12$, $I_y = b^3h/4$

19. $I_x = (a + b)h^3/24$, $I_y = h(a + b)(a^2 + b^2)/48$

問題 4.4

1. $9(e^2 - 1) - 8(e^3 - 1)/3$　**3.** $-\pi/2$　**5.** 0

7. $2 \cdot 5^7/7$　**9.** $\frac{16}{5}$　**11.** $a^2(3\pi/8 - 1)$

13. $2 + 3\pi/4$　**15.** $(\cosh 4 - 1)/2$　**17.** 10π

19. グリーンの定理において $F_1 = -ww_y$, $F_2 = ww_x$ とおけば，$F_1\,dx + F_2\,dy = w(\mathrm{grad}\,w) \cdot \boldsymbol{n}\,ds$ などが得られる．

問題 4.5

1. 直線，$\boldsymbol{k}$

3. $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$，円，直線，$[-cu\cos v,\ -cu\sin v,\ u]$

5. $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$，楕円，放物線，$[-2bu^2\cos v,\ -2au^2\sin v,\ abu]$

7. $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$，双曲線，放物線，$[-2bu^2\cosh v,\ 2au^2\sinh v,\ abu]$

9. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$，楕円，直線，$[-b\cos v,\ -a\sin v,\ 0]$

13. $[8u,\ 6v,\ 4(1 - u - v)]$, $[3,\ 4,\ 6]$

15. $[\cos v\cos u,\ \cos v\sin u,\ 2\sin v]$, $[2\cos u\cos^2 v,\ 2\sin u\cos^2 v,\ \sin v\cos v]$

17. $[\cosh u,\ \sinh u,\ v]$, $[\cosh u,\ -\sinh u,\ 0]$

19. $[u\cos v,\ u\sin v,\ 9u^2]$, $[-18u^2\cos v,\ -18u^2\sin v,\ u]$

21. $\widetilde{\boldsymbol{r}} = [u,\ v,\ 9(u^2+v^2)]$, $\widetilde{\boldsymbol{N}} = [-18u,\ -18v,\ 1]$

25. $\frac{1}{9}[4,\ -4,\ 7]$　**27.** $(1/a)[0,\ y,\ z]$　**29.** $\frac{1}{6}[x,\ y,\ z]$

問題 4.6

1. -36　**3.** $2\sinh 6$　**5.** 0

7. 4.5 節の式 (3) から $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{N} = \cos^3 v\cos u\sin u$ となる．［答］$\frac{1}{3}$

9. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{N} = -u^3$　［答］-128π

13. $dA = \sqrt{26}\,dxdy$, $1 \leqq x < \infty$, $1 \leqq y < \infty$ で積分せよ．［答］$\sqrt{26}/e$

15. $G(\boldsymbol{r}) = (1+9u^4)^{3/2}$, $|\boldsymbol{N}| = (1+9u^4)^{1/2}$　［答］54.4

17. 27π　**21.** $2\pi h$　**23.** $\pi h^4/\sqrt{2}$　**25.** $\pi h + 2\pi h^3/3$

問題 4.7

1. 224　**3.** $4+8/\pi^2$　**5.** $\frac{1}{10}$　**7.** $\frac{16}{3}$　**9.** $2a^5/3$　**11.** $\pi a^4 h/2$

13. 0　**15.** 0　**17.** $\frac{2}{3}$　**19.** $2916\pi/5$

問題 4.8

1. $\iint \frac{\partial f}{\partial n}\,dA = \iint \frac{\partial f}{\partial x}\,dydz + \iint \frac{\partial f}{\partial y}\,dzdx + \iint \frac{\partial f}{\partial z}\,dxdy$ を構成する 3 つの積分を端点 $x=1$, $y=2$, $z=4$ で計算すると，それぞれ $8\cdot(-2)$, $4\cdot(-4)$, $2\cdot 16$ となり，和は 0 である．原点 $x=0$, $y=0$, $z=0$ では全積分が 0 である．

3. $16\pi/3$　**5.** 480π　**7.** $1/2 - \pi^2/8 + \pi^3/24$

9. $\boldsymbol{F} = [x,\ y,\ z]$, $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3$. 4.7 節の式 (2) によれば，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{n}|\cos\phi = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\phi = r\cos\phi$ となる．

11. $\boldsymbol{F} = [x,\ 0,\ 0]$, $\operatorname{div} F = 1$ として 4.7 節の式 (3) を使え．

問題 4.9

1. 5，線積分 $= 1+5-1+0 = 5$

3. $\pm 4(1-e^4) \approx \pm 214$. ± 4 は (0, 0, 0) から (4, 0, 0) まで，$\mp 4e^4$ は (4, 2, 4) から (0, 2, 4) までの積分である．放物線上の積分は打ち消し合って寄与しない．

5. $\pm\frac{4}{3}$. 半円上では $\pm\frac{4}{3}$，放物線上では 0 となる．

7. $\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = 9\boldsymbol{k}$　［答］36π　**9.** $\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$　［答］-4π

11. $(\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{N} = -xy + y(1-x-y)$　［答］0　**13.** $-\frac{1}{2}$

4 章の復習

17. e，完全微分．

19. ± 2，完全微分ではない．

21. 4，ストークスの定理による．

23. $1+\sqrt{2}$，完全微分．

25. $2+e^2-e$，完全微分．

27. 0，$\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ となるため．

29. 0，グリーンの定理による．

31. $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{15}$

33. $M = 2\ln 2 - 1$, $\bar{x} = (2\ln 2 - \frac{3}{4})/M$, $\bar{y} = (\ln 2 - 1)^2/M$

35. $\frac{8}{7}$, $\frac{118}{49}$　**37.** -8　**39.** 63　**41.** $-\frac{4}{3}$　**43.** 4π　**45.** 72π

付録 3

補足事項

A3.1　基本的な関数の公式

指数関数 e^x (図 A1)

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353.$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad e^x/e^y = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}. \tag{1}$$

自然対数 (図 A2)

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x. \tag{2}$$

$\ln x$ は e^x の逆関数であり，$e^{\ln x} = x$,　$e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = 1/x$.

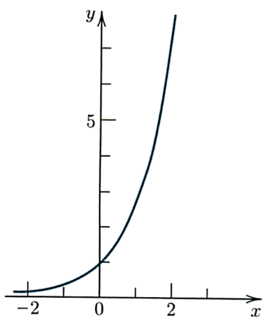


図 A1　指数関数 e^x

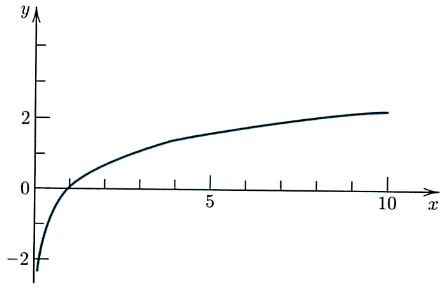


図 A2　自然対数 $\ln x$

常用対数　　$\log_{10} x$ あるいは簡単に $\log x$ と書く.

$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18917. \tag{3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 54684. \tag{4}$$

$\log x$ は 10^x の逆関数であり，$10^{\log x} = x$,　$10^{-\log x} = 1/x$.

正弦関数と余弦関数 (図 A3, A4)　　微積分学では角度をラジアンで表すので，$\sin x$ と $\cos x$ は周期 2π をもつ．ただし，$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279$ である．

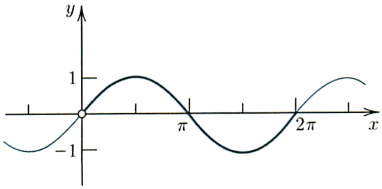


図 A3　$\sin x$

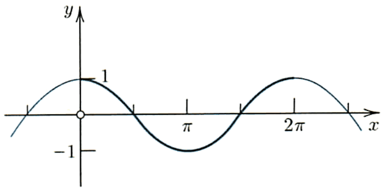


図 A4　$\cos x$

$\sin x$ は奇関数で $\sin(-x) = -\sin x$ である．$\cos x$ は偶関数で $\cos(-x) = \cos x$ である．

$$1^\circ = 0.01745\ 32925\ 19943 \text{ ラジアン}.$$

$$1 \text{ ラジアン} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.29577\ 95131^\circ.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \end{cases} \tag{6}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right), \\ \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right). \end{cases} \tag{8}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x. \tag{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \tag{10}$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)], \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)], \\ \sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]. \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \sin u + \sin v = 2 \sin \dfrac{u+v}{2} \cos \dfrac{u-v}{2}, \\ \cos u + \cos v = 2 \cos \dfrac{u+v}{2} \cos \dfrac{u-v}{2}, \\ \cos v - \cos u = 2 \sin \dfrac{u+v}{2} \sin \dfrac{u-v}{2}. \end{cases} \tag{12}$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x\pm\delta), \qquad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{B}{A}. \tag{13}$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x\pm\delta), \qquad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{A}{B}. \tag{14}$$

正接，余接，正割，余割 (図 A5, A6)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}. \tag{15}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}, \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}. \tag{16}$$

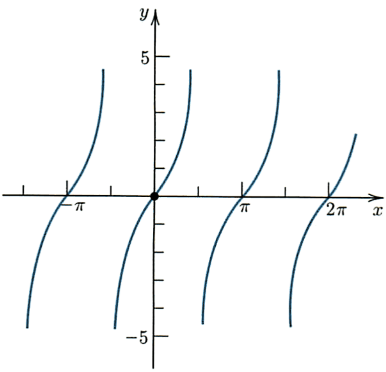


図 A5　$\tan x$

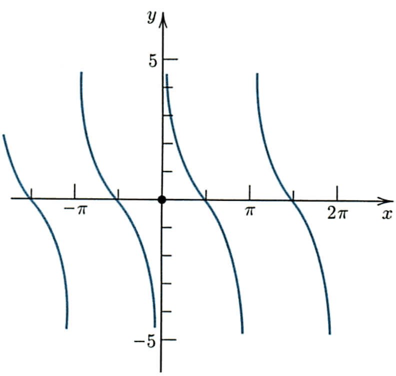


図 A6　$\cot x$

双曲線関数 (図 A7, A8)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \tag{17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}. \tag{18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \qquad \cosh x - \sinh x = e^{-x}. \tag{19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{20}$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \qquad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1). \tag{21}$$

$$\begin{cases} \sinh(x\pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y, \\ \cosh(x\pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y. \end{cases} \tag{22}$$

$$\tanh(x\pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}. \tag{23}$$

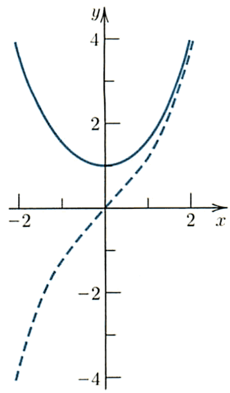


図 A7　$\sinh x$ (破線) と $\cosh x$ (実線)

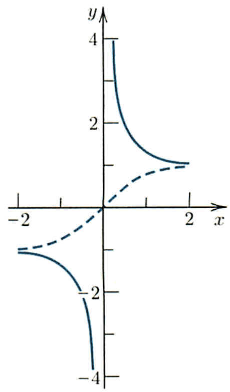


図 A8　$\tanh x$ (破線) と $\coth x$ (実線)

ガンマ関数 (図 A9，付録 5 の表 A2)　　ガンマ関数 $\Gamma(\alpha)$ は，つぎの積分で定義される．

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \qquad (\alpha > 0). \tag{24}$$

これは，$\alpha > 0$ (α が複素数の場合は実部が正) のときのみ意味をもつ．部分積分により，ガンマ関数についてつぎの重要な関係が得られる．

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{25}$$

式 (24) より，ただちに $\Gamma(1) = 1$ が得られる．したがって α が正の整数のとき，これを

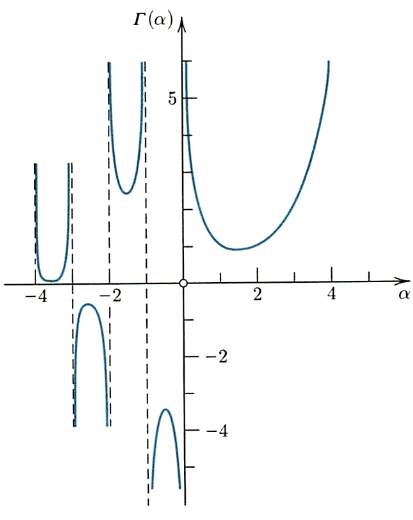


図 A9　ガンマ関数

k と書くと，式 (25) を繰り返して用いることにより，

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, \cdots) \tag{26}$$

が得られる．これより，ガンマ関数が初等的な階乗関数の一般化になっていることがわかる．(α の非整数値に対しても $\Gamma(\alpha)$ のかわりに $(\alpha-1)!$ と書くことがあり，またガンマ関数を**階乗関数**とよぶことがある.)

式 (25) を繰り返して用いると，

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

が得られる．$\alpha+k+1>0$ となるような最小の k を選ぶことにより，関係式

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{27}$$

を用いて負の $\alpha\,(\neq -1, -2, \cdots)$ に対するガンマ関数を定義することができる．これと式 (24) により，0 および負の整数を除くすべての α に対して $\Gamma(\alpha)$ が定義される (図 A9).

つぎの公式により，無限乗積としてガンマ関数を表すことができる．

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots). \tag{28}$$

式 (27) と式 (28) から，複素数 α に対してガンマ関数 $\Gamma(\alpha)$ は**有理型関数**[1]であり，$\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ において単純極をもっていることがわかる．正の大きな α に対するガンマ関数の近似式は，**スターリングの公式**

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{29}$$

で与えられる．ここで e は自然対数の底である．最後に，ガンマ関数の特別な値を示す．

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{30}$$

不完全ガンマ関数

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,dt, \qquad Q(\alpha, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\,dt \qquad (\alpha > 0). \tag{31}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x). \tag{32}$$

ベータ関数

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad (x>0,\ y>0). \tag{33}$$

ガンマ関数を用いた表示：

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{34}$$

誤差関数 (図 A10，付録 5 の表 A4)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt. \tag{35}$$

1) (訳注)　有限平面上で極以外の特異点をもたない解析関数を有理型関数という (第 4 巻 4.3 節例 5 参照).

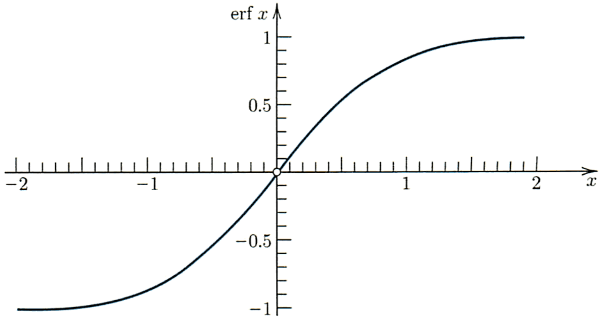


図 A10 誤差関数

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + - \cdots\right). \tag{36}$$

$\operatorname{erf}(\infty) = 1$ である．補誤差関数は，

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt \tag{37}$$

で定義される．

フレネル[2)]積分 (図 A11)

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt, \qquad S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt. \tag{38}$$

$C(\infty) = \sqrt{\pi/8}$, $S(\infty) = \sqrt{\pi/8}$ である．フレネル積分の補関数は，

$$\begin{aligned} c(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt, \\ s(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \end{aligned} \tag{39}$$

で定義される．

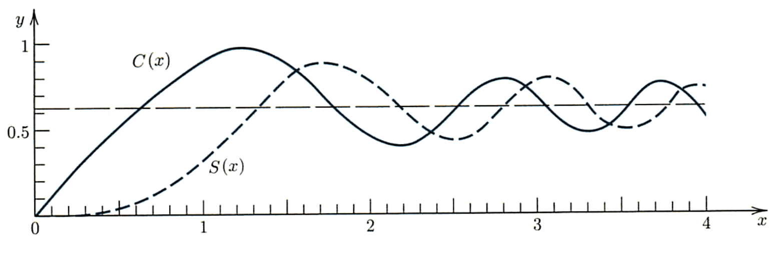


図 A11 フレネル積分

2) Augustin Fresnel (1788–1827)，フランスの物理学者，数学者．フレネル積分の数表は，付録 1 の [1] を参照せよ．

正弦積分 (図 A12，付録 5 の表 A4)

$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{40}$$

$\mathrm{Si}\,(\infty) = \pi/2$ である．**正弦積分の補関数**は，

$$\mathrm{si}\,(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\,(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{41}$$

で定義される[3]．

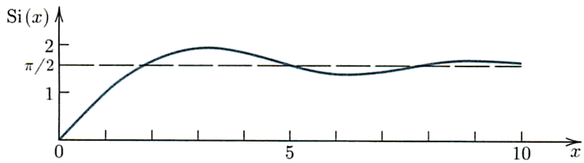


図 A12　正弦積分

余弦積分 (付録 5 の表 A4)　$\mathrm{ci}\,(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \quad (x > 0).$ (42)

指数積分　$\mathrm{Ei}\,(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad (x > 0).$ (43)

対数積分　$\mathrm{li}\,(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}.$ (44)

A3.2　偏 導 関 数

$z = f(x, y)$ を 2 つの独立実変数 x, y の実関数とする．y を一定，たとえば $y = y_1$ として x を変数と考えれば，$f(x, y_1)$ は x だけに依存する．x に関する $f(x, y_1)$ の導関数，すなわち**偏導関数**が $x = x_1$ において存在するとき，その導関数の値を点 (x_1, y_1) における $f(x, y)$ の x についての**偏微分係数**といい，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} \qquad \text{あるいは} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}$$

と記す．また，

$$f_x(x_1, y_1) \qquad \text{および} \qquad z_x(x_1, y_1)$$

3) (訳注) この種の積分関数の定義は，書物によって微妙に異なることがあるから注意が必要である．たとえば「岩波数学辞典 第 4 版」(岩波書店，2007) では，正弦積分関数は $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$，$\mathrm{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$，余弦積分関数は $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$，指数積分関数は $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt$，対数積分関数は $\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ として定義されている．

などの表記を用いてもよい．ほかの目的で添数を使わない場合には混乱のおそれがないからである．

導関数の定義によれば，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x, y_1)-f(x_1,y_1)}{\Delta x} \qquad (1)$$

である．

$z=f(x,y)$ の y に関する偏導関数も同様に定義される．今度は x を定数 x_1 として y について微分する．すなわち，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_1, y_1+\Delta y)-f(x_1,y_1)}{\Delta y} \qquad (2)$$

である．別の表記は $f_y(x_1,y_1)$，$z_y(x_1,y_1)$ などである．

これらの 2 つの偏導関数が一般に点 (x_1,y_1) に依存することは明らかである．したがって，変動する点 (x,y) に対する偏導関数 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ は x と y の関数である．関数 $\partial z/\partial x$ は y を定数とみなして $z=f(x,y)$ を x について微分して得られ，$\partial z/\partial y$ は x を定数とみなして z を y について微分して得られる．

例 1　$z=f(x,y)=x^2y+x\sin y$ とすると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+\sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+x\cos y.$$ ◀

関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数 $\partial z/\partial x$ および $\partial z/\partial y$ には非常に単純な幾何学的な意味がある．関数 $z=f(x,y)$ は空間の曲面によって表される．方程式 $y=y_1$ は垂直面が曲面と交わる曲線を表し，点 (x_1,y_1) における偏導関数 $\partial z/\partial x$ はこの曲線の接線の勾配(図 A13 に示された角 α の正接 $\tan\alpha$)を与える．同様に，点 (x_1,y_1) における偏導関数 $\partial z/\partial y$ は，点 (x_1,y_1) における曲面 $z=f(x,y)$ 上の曲線 $x=x_1$ の接線の勾配 $(\tan\beta)$ を与える．

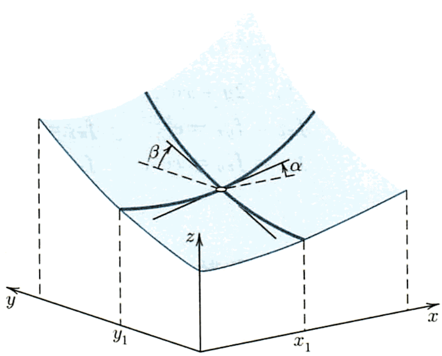


図 A13　1 階偏導関数の幾何学的解釈

偏導関数 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ は 1 階偏導関数ともよばれる．これらの導関数をもう 1 回微分すれば 2 階偏導関数[4)]が得られる．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}, \tag{3b}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}, \tag{3c}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}. \tag{3d}$$

これらのすべての偏導関数が連続ならば，2 つの混合偏導関数が等しくなるため，微分の順序に注意する必要はないことが示される (付録 1 の [5] 参照)．すなわち，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \tag{4}$$

がなりたつ．

例 2 例 1 の関数に対しては 2 階偏導関数はつぎのようになる．

$$f_{xx} = 2y, \qquad f_{xy} = 2x + \cos y = f_{yx}, \qquad f_{yy} = -x \sin y. \qquad ◀$$

2 階偏導関数をふたたび x や y について微分すれば 3 階偏導関数が得られ，必要に応じてさらに高階の偏導関数も考えられる．

3 つの独立変数の関数 $f(x,y,z)$ が与えられたときには，3 つの 1 階偏導関数 $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ が考えられる．ここで，f_x は y と z をともに定数として f を x について微分して得られる．定義式 (1) と同様に，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1,z_1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x,\, y_1,\, z_1) - f(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x}$$

などとなる．f_x, f_y, f_z をさらに同じ方法で微分すれば，f の 2 階以上の高階偏導関数が求められる．

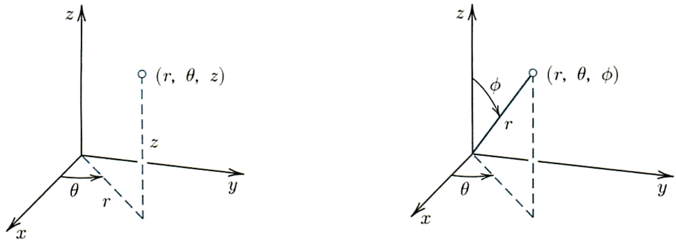
例 3 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xye^z$ のとき，

$$\begin{aligned} &f_x = 2x + ye^z, && f_y = 2y + xe^z, && f_z = 2z + xye^z, \\ &f_{xx} = 2, && f_{xy} = f_{yx} = e^z, && f_{xz} = f_{zx} = ye^z, \\ &f_{yy} = 2, && f_{yz} = f_{zy} = xe^z, && f_{zz} = 2 + xye^z. \end{aligned} \qquad ◀$$

A3.3 曲線座標による勾配，発散，回転，ラプラシアンの表示

公式を見やすくするために，デカルト座標を $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ と書き，曲線座標を q_1, q_2, q_3 と記そう．各点 P を通る 3 つの座標曲面 $q_1 =$ 一定，$q_2 =$ 一定，$q_3 =$ 一定 が存在する．これらの曲面は座標曲線に沿って交わる．P を通る 3 つの座標曲線

4) 添数表記では添数は微分の順に書かれるが，“∂” 表記では順序が逆になることを注意せよ．



(a)　円柱座標　　(b)　球座標

図 A14　特殊な曲線座標

は**直交**する (互いに垂直である) と仮定する．座標変換を

$$x_1 = x_1\,(q_1, q_2, q_3), \qquad x_2 = x_2\,(q_1, q_2, q_3), \qquad x_3 = x_3\,(q_1, q_2, q_3) \tag{1}$$

のように書くと，対応する勾配，発散，回転，ラプラシアンの変換は

$$h_j{}^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\right)^2 \tag{2}$$

を用いて表すことができる．デカルト座標のつぎにもっとも重要な座標は，

$$x_1 = q_1 \cos q_2 = r\cos\theta, \quad x_2 = q_1 \sin q_2 = r\sin\theta, \quad x_3 = q_3 = z \tag{3}$$

で定義される**円柱座標** $q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = z$ (図 A14(a))，および

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \cos q_2 \sin q_3 = r\cos\theta\sin\phi, \\ x_2 &= q_1 \sin q_2 \sin q_3 = r\sin\theta\sin\phi, \\ x_3 &= q_1 \cos q_3 = r\cos\phi \end{aligned} \tag{4}$$

で定義される**球座標** (空間の極座標)[5] $q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \phi$ である (図 A14(b))．任意の直交曲線座標 q_1, q_2, q_3 に対する一般の公式のほかに，これらの重要な特別な場合に対する付加的な公式も示すことにする．

線　素　　デカルト座標では，

$$ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 \qquad (3.5\ 節).$$

$q_1 q_2 q_3$ 座標に対しては，

$$ds^2 = h_1{}^2\, dq_1{}^2 + h_2{}^2\, dq_2{}^2 + h_3{}^2\, dq_3{}^2, \tag{5}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2. \qquad (円柱座標) \tag{5'}$$

(平面の極座標も特別な場合 $dz^2 = 0$ として含まれる.)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\phi\ \ d\theta^2 + r^2\, d\phi^2. \qquad (球座標) \tag{5''}$$

---

5)　これは微積分やほかの多くの文献で用いられている記号であり，θ は平面の極座標の場合と同じ役割を果たすので論理的でもある．ただし，θ と ϕ は逆の意味に使うこともあるので注意を要する．

勾　配　$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = [\, f_{x_1},\ f_{x_2},\ f_{x_3}\,]$ (3.9節)．曲線座標系においては, q_1, q_2, q_3 座標曲線の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ で表せば,

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial g_1}\boldsymbol{u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial g_2}\boldsymbol{v} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial g_3}\boldsymbol{w}, \qquad (6)$$

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{v} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{w}, \qquad \text{(円柱座標)} \qquad (6')$$

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{u} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{v} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{w}. \qquad \text{(球座標)} \qquad (6'')$$

発　散　$\mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = (F_1)_{x_1} + (F_2)_{x_2} + (F_3)_{x_3}$　($\boldsymbol{F} = [F_1,\ F_2,\ F_3]$, 3.10節)．

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 F_3)\right], \qquad (7)$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial F^2}{\partial \theta} + \frac{\partial F^3}{\partial z}, \qquad \text{(円柱座標)} \qquad (7')$$

$$\mathrm{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_1) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi F_3). \qquad \text{(球座標)} \qquad (7'')$$

ラプラシアン　$\Delta f = \nabla^2 f = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f) = f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} + f_{x_3 x_3}$　(3.10節)．

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right], \qquad (8)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \qquad \text{(円柱座標)} \qquad (8')$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}. \qquad \text{(球座標)} \qquad (8'')$$

回　転

$$\mathrm{curl}\, \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{u} & h_2\boldsymbol{v} & h_3\boldsymbol{w} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(3.11節)}. \qquad (9)$$

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = q_1 = r, \quad h_3 = h_z = 1. \qquad \text{(円柱座標)}$$

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = q_1 \sin q_3 = r\sin\phi, \quad h_3 = h_\phi = q_1 = r. \qquad \text{(球座標)}$$

付録 4

追加証明

1.6 節

行列式の定義が確定的であることの証明　1.6 節に与えた行列式

$$D = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

の定義が確定的であること，すなわち，どの行あるいはどの列についての展開も結局は同じ D の値を与えることを示そう．(これから使う式の番号は 1.6 節からの続き番号とする.)

はじめに，どの行を選んでも同じ値が得られることを証明する．

証明は数学的帰納法による．命題は 2 次の行列式については真である．第 1 行による展開 $a_{11}a_{22}+a_{12}(-a_{21})$ と第 2 行による展開 $a_{21}(-a_{12})+a_{22}a_{11}$ が同じ値 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ を与えるからである．そこで，これが $n-1$ 次の行列式に対してなりたつものと仮定して，n 次の行列式に対してもなりたつことを証明しよう．

そのために，D を任意の 2 つの行，たとえば第 i 行と第 j 行について展開して，その結果を比較する．$i<j$ と仮定しても一般性を失うことはない．

第 1 の展開　D を第 i 行について展開する．展開項は

$$a_{ik}C_{ik} = a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} M_{ik} \tag{19}$$

である．D の a_{ik} に対する小行列式 M_{ik} は $n-1$ 次の行列式である．帰納法の仮定により M_{ik} をどの行について展開しても同じ値が得られる．D の第 j 行に相当する M_{ik} の行について M_{ik} を展開しよう．これは成分 $a_{jl}(l \neq k)$ からなる行であって，M_{ik} においては第 $j-1$ 行である．なぜならば M_{ik} は D の第 i 行の成分を含んでおらず，そのうえ $i<j$ であるからである．ここでつぎの 2 つの場合を区別する．

(場合 I)　$l<k$ ならば，成分 a_{jl} は M_{ik} の第 l 列に属する (図 A15)．したがって，M_{ik} の展開における a_{jl} を含む項は，M_{ik} の a_{jl} に対する小行列式を M_{ikjl} として

$$a_{jl} \cdot (M_{ik}\text{における } a_{jl}\text{の余因子}) = a_{jl} \cdot (-1)^{(j-1)+l} M_{ikjl} \tag{20}$$

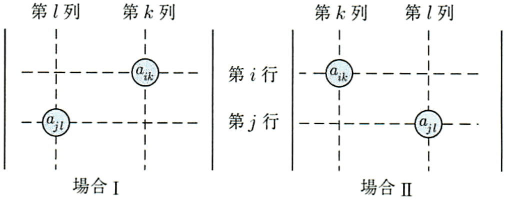


図 A15　D の展開の場合 I と場合 II

である．この小行列式 M_{ikjl} は M_{ik} から a_{jl} の位置する行および列を消して得られるので，D からは第 i 行と第 j 行および第 k 列と第 l 列を除いて得られるわけである．M_{ik} のこの展開式を D のはじめの展開式に代入してみよう．すると，式 (19), (20) により，D の展開項は

$$a_{ik}a_{jl}\cdot(-1)^b M_{ikjl} \qquad (l<k) \tag{21a}$$

となる．ここで，

$$b=i+k+j+l-1.$$

(場合 II)　$l>k$ のときには，I の場合と異なるのは a_{jl} が M_{ik} の第 $l-1$ 列に属することだけである．なぜならば M_{ik} は D の第 k 列の成分を含まず，しかも $k<l$ であるからである．このため式 (20) に余分の負号がつくので，式 (21a) のかわりに

$$-a_{ik}a_{jl}\cdot(-1)^b M_{ikjl} \qquad (l>k) \tag{21b}$$

を得る．ただし b は前と同じものである．

第 2 の展開　　D の第 j 行についての展開はつぎの形の項の総和である．

$$a_{jl}C_{jl}=a_{jl}\cdot(-1)^{j+l}M_{jl}. \tag{22}$$

帰納法の仮定から D の a_{jl} に対する小行列式 M_{jl} を第 i 行について展開することができる．$j>i$ であるから，M_{jl} の第 i 行は D の第 i 行に相当している．

(場合 I)　$k>l$ であるとき，この第 i 行の成分 a_{ik} は M_{jl} の第 $k-1$ 列に属する．M_{jl} は D の第 l 列の成分を含んでおらず，そして $l<k$ であるからである (図 A15)．ゆえに，M_{jl} のこの展開で a_{ik} を含む項は

$$a_{ik}\cdot(M_{jl}\text{ における }a_{ik}\text{ の余因子})=a_{ik}\cdot(-1)^{i+(k-l)}M_{ikjl} \tag{23}$$

となる．ここで，M_{jl} の a_{ik} に対する小行列式 M_{ikjl} は，D から第 i 行と第 j 行および第 k 列と第 l 列を除いて得られるものである．(これはたしかに式 (20) における M_{ikjl} と一致しているので，われわれの記号に矛盾はない．)　M_{jl} のこの展開式を D の展開式に代入すれば，式 (22), (23) から導かれる展開項は，$l<k$ のときに式 (21a) で与えられる項とまったく同じになる．

(場合 II)　$k<l$ ならば，a_{ik} が M_{jl} の第 k 列に属するため，負号が 1 つ余分につき，式 (21b) と同じ結果が得られる．

以上によって，D の 2 つの行に関する展開が同一の項からなることが示され，展開が行について確定的であることが証明された．

展開が列について確定的であることの証明も行の場合とほとんど同様に行われる．すなわち，D の任意の 2 列，たとえば第 k 列および第 l 列について展開すれば，$a_{jl}a_{ik}$ を

含む一般項は前とまったく同じであることがわかる．したがって，D のどの列についての展開からも同じ値が得られることばかりでなく，この共通の値が行についての展開から得られる共通の値とも一致することが証明される．

これで証明が終わり，n 次の行列式の定義が確定的であることが示された．◀

3.3 節

公式 (2) の証明　右手系のデカルト座標に関して，外積

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [a_1,\ a_2,\ a_3] \times [b_1,\ b_2,\ b_3]$$

の成分が

$$v_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \qquad v_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \qquad v_3 = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{2}$$

で与えられることを証明する．

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ の場合だけを考えれば十分である．$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のどちらにも垂直であるから，3.2 節の定理 1 より $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ および $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ が得られ，成分表示 (3.2 節の式 (2) 参照) では

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0, \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

がなりたつ．第 1 式に b_3 を掛け，第 2 式に a_3 を掛けて引くと，

$$(a_3b_1 - a_1b_3)v_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)v_2$$

を得る．つぎに，第 1 式に b_1 を掛け，第 2 式に a_1 を掛けて引くと，

$$(a_1b_2 - a_2b_1)v_2 = (a_3b_1 - a_1b_3)v_3$$

となる．これらの 2 つの式は，

$$v_1 = c(a_2b_3 - a_3b_2), \qquad v_2 = c(a_3b_1 - a_1b_3), \qquad v_3 = c(a_1b_2 - a_2b_1) \tag{4}$$

によって満足される．ここで c は定数である．式 (4) が式 (3) も満足することは代入によりすぐ確かめられる．式 (3) の各式は $v_1v_2v_3$ 空間において原点を通る平面を表している．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ はこれらの平面の法線ベクトルである (3.2 節の例 6)．$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ であるから，これらのベクトルは平行ではなく，2 つの平面は一致しない．ゆえに，その交線は原点を通る直線 L である．式 (4) は式 (3) の解であり，c の値を変えていくと 1 つの直線を与える．結論として，式 (4) は L を表し，式 (3) のすべての解は式 (4) の形をとらなければならない．すなわち，$\boldsymbol{v}$ の成分は式 (4) で表され，c は決定されるべき定数ということになる．式 (4) より，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}|^2 &= {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2 \\ &= c^2[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]. \end{aligned}$$

容易に確かめられるように，この式は

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2]$$

と書ける．3.2 節の式 (2) を用いて次式が得られる．

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2].$$

これと問題 2.3 の協同プロジェクト 38(a) の公式を比較すれば，$c = \pm 1$ と結論される．

さらに $c = +1$ であることを示したい．これはつぎのように行われる．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさと方向を連続的に変えて，最後に $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$ になるようにすると(図 3.24(a))，$\boldsymbol{v}$ の大きさと方向も連続的に変わり，最後に $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$ となる．明らかに，いかなる瞬間においても $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ ともに零ベクトルにならないように，しかも互いに平行にならないように，この変化を実現することができる．こうすれば $\boldsymbol{v}$ は決して零ベクトルになることはなく，また変化は連続的であり，c は $+1$ か -1 のいずれかの値しかとれないから，結局 c は最後まではじめと同じ値でなくてはならない．さて，最終的には $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}$ となるため，$a_1=1$, $b_2=1$, $v_3=1$ であり，それ以外の式 (4) の成分は 0 である．ゆえに式 (4) から $v_3=c=+1$ である．これで定理は証明された．

左手系デカルト座標に対しては $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{k}$ であり (図 3.24(b))，$c=-1$ という結果になる．すなわち，3.3 節の式 (2) の直後に述べた命題が証明される． ◀

3.11 節

定理 1 の証明　(回転の不変性)　　この証明に必要な 2 つの定理 (定理 A および定理 B) をまず証明する．

定理 A (ベクトル成分の変換法則)　x_1,x_2,x_3 および $x_1{}^*,x_2{}^*,x_3{}^*$ を (原点を共有する) 任意の 2 つのデカルト座標系とする．これらの 2 つの座標系に関する任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分 v_1,v_2,v_3 と $v_1{}^*,v_2{}^*,v_3{}^*$ の間には，

$$\begin{aligned}v_1{}^* &= c_{11}v_1+c_{12}v_2+c_{13}v_3,\\ v_2{}^* &= c_{21}v_1+c_{22}v_2+c_{23}v_3,\\ v_3{}^* &= c_{31}v_1+c_{32}v_2+c_{33}v_3\end{aligned}\tag{1}$$

のような関係がある．逆に，

$$\begin{aligned}v_1 &= c_{11}v_1{}^*+c_{21}v_2{}^*+c_{31}v_3{}^*,\\ v_2 &= c_{12}v_1{}^*+c_{22}v_2{}^*+c_{32}v_3{}^*,\\ v_3 &= c_{13}v_1{}^*+c_{23}v_2{}^*+c_{33}v_3{}^*\end{aligned}\tag{2}$$

もなりたつ．係数は，

$$\begin{aligned}&c_{11}=\boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{i}, &&c_{12}=\boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{j}, &&c_{13}=\boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{k},\\ &c_{21}=\boldsymbol{j}^*\cdot\boldsymbol{i}, &&c_{22}=\boldsymbol{j}^*\cdot\boldsymbol{j}, &&c_{23}=\boldsymbol{j}^*\cdot\boldsymbol{k},\\ &c_{31}=\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{i}, &&c_{32}=\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{j}, &&c_{33}=\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{3}$$

であって，

$$\sum_{j=1}^{3}c_{kj}c_{mj}=\delta_{km}\qquad(k,m=1,2,3)\tag{4}$$

を満たす．ただし δ_{km} はクロネッカー[1]デルタとよばれ，

$$\delta_{km}=\begin{cases}0 & (k\neq m),\\ 1 & (k=m)\end{cases}$$

で与えられる．$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{i}^*,\boldsymbol{j}^*,\boldsymbol{k}^*$ は，それぞれ正の x_1,x_2,x_3 方向および $x_1{}^*,x_2{}^*,x_3{}^*$

1) Leopold Kronecker (1823–1891)，ドイツの数学者．代数学，群論，整数論に重要な貢献をした．

方向の単位ベクトルを表す[2)].

［証明］　2 つの座標系による $\boldsymbol{v}$ の表示を

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}, \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{v} = v_1{}^*\boldsymbol{i}^* + v_2{}^*\boldsymbol{j}^* + v_3{}^*\boldsymbol{k}^* \tag{5b}$$

とする．$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i}^* = 1$, $\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j}^* = 0$, $\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k}^* = 0$ なので，式 (5b) から $\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = v_1{}^*$ が得られる．これと式 (5a) により，

$$v_1{}^* = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}^* \cdot v_1\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}^* \cdot v_2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}^* \cdot v_3\boldsymbol{k} = v_1\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k}.$$

式 (3) を考慮すればこれは公式 (1) の第 1 式であり，ほかの 2 つの式も $\boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{v}$ から同様にして得られる．公式 (2) も同じ考え方で求めることができる．たとえば，$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{v} = v_1$ をとり式 (5a), (5b), (3) を使えば，

$$v_1 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{v} = v_1{}^*\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}^* + v_2{}^*\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}^* + v_3{}^*\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}^* = c_{11}v_1{}^* + c_{21}v_2{}^* + c_{31}v_3{}^*$$

を得る．ほかの 2 つの成分についても同様である．

つぎに式 (4) を証明する．式 (1) および式 (2) は簡単に

$$v_j = \sum_{m=1}^{3} c_{mj}v_m{}^*, \tag{6a}$$

$$v_k{}^* = \sum_{j=1}^{3} c_{kj}v_j \tag{6b}$$

と書ける．v_j を $v_k{}^*$ に代入すれば，

$$v_k{}^* = \sum_{j=1}^{3} c_{kj} \sum_{m=1}^{3} c_{mj}v_m{}^* = \sum_{m=1}^{3} v_m{}^*\left(\sum_{j=1}^{3} c_{kj}c_{mj}\right).$$

ただし $k = 1, 2, 3$ である．$k = 1$ のときには，

$$v_1{}^* = v_1{}^*\left(\sum_{j=1}^{3} c_{1j}c_{1j}\right) + v_2{}^*\left(\sum_{j=1}^{3} c_{1j}c_{2j}\right) + v_3{}^*\left(\sum_{j=1}^{3} c_{1j}c_{3j}\right)$$

となる．これがすべての $\boldsymbol{v}$ に対して成立するためには，右辺の第 1 の和は 1 で第 2，第 3 の和は 0 でなければならない．これで $k = 1$ かつ $m = 1, 2, 3$ に対して式 (4) が証明された．$k = 2$ および $k = 3$ とおけば，$k = 2, 3$ かつ $m = 1, 2, 3$ に対して式 (4) を導くことができる．◀

あるデカルト座標系からほかのデカルト座標系へのもっとも一般的な変換は，定理 A で考察した種類の変換 (鏡映を含めた回転) と平行移動に分解される．平行移動のもとでは対応する座標は定数だけ異なる．こうしてつぎの定理を得る．

定理 B (デカルト座標の変換法則)　任意の $x_1x_2x_3$ デカルト座標系からほかの任意の $x_1{}^*x_2{}^*x_3{}^*$ デカルト座標系への変換は，係数 (3) と定数 b_1, b_2, b_3 に対して

$$x_m{}^* = \sum_{j=1}^{3} c_{mj}x_j + b_m \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{7}$$

2)　ここでは 2 章と無関係に議論を進めるが，行列にくわしい読者はわれわれが直交変換と直交行列を扱っていて，定理 A は 2.3 節の定理 2 の直接の結果であることが理解できるはずである．

の形であり，逆に

$$x_k = \sum_{n=1}^{3} c_{nk} x_n{}^* + \widetilde{b}_k \qquad (k=1,2,3) \tag{8}$$

でも表される．

定理 1 の証明　(回転の不変性)　ベクトル $\boldsymbol{v}$ の回転 curl $\boldsymbol{v}$ は 3.11 節の式 (1) によって定義されるが，この式 (1) の x, y, z のかわりにふたたび x_1, x_2, x_3 と書くことにする．2 つの右手系デカルト座標 x_1, x_2, x_3 および $x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*$ に関する curl $\boldsymbol{v}$ の成分をそれぞれ a_1, a_2, a_3 および $a_1{}^*, a_2{}^*, a_3{}^*$ と記す．curl $\boldsymbol{v}$ の大きさが定理で主張されるようにデカルト座標の選び方によらないことを証明しよう．そのため，curl $\boldsymbol{v}$ の成分がベクトル成分を特徴づける変換法則 (2) を満足することを示したい．まず a_1 について考える．式 (6a) と多変数関数に対する連鎖法則 (3.8 節) を適用すれば，

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ &= \sum_{m=1}^{3} \left(c_{m3} \frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_2} - c_{m2} \frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_3} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(c_{m3} \frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_j{}^*} \frac{\partial x_j{}^*}{\partial x_2} - c_{m2} \frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_j{}^*} \frac{\partial x_j{}^*}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

これと式 (7) から

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{m=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (c_{m3} c_{j2} - c_{m2} c_{j3}) \frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_j{}^*} \\ &= (c_{33} c_{22} - c_{32} c_{23}) \left(\frac{\partial v_3{}^*}{\partial x_2{}^*} - \frac{\partial v_2{}^*}{\partial x_3{}^*} \right) + \cdots \\ &= (c_{33} c_{22} - c_{32} c_{23})\, a_1{}^* + (c_{13} c_{32} - c_{12} c_{33})\, a_2{}^* + (c_{23} c_{12} - c_{22} c_{13})\, a_3{}^* \end{aligned}$$

が得られる．この 2 重和は $3 \times 3 = 9$ 項からなるが，$m = j$ に対する 3 項は 0 であり，残る 6 項はそれぞれ $a_1{}^*, a_2{}^*, a_3{}^*$ を含む 3 項にまとめられるわけである．

ここで，式 (3)，ラグランジュの恒等式 (問題 3.3 の協同プロジェクト 38(d))，さらに $\boldsymbol{k}^* \times \boldsymbol{j}^* = -\boldsymbol{i}^*$，$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$ を使えば，

$$\begin{aligned} c_{33} c_{22} - c_{32} c_{23} &= (\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{k})(\boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{j}) - (\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{j})(\boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{k}) \\ &= (\boldsymbol{k}^* \times \boldsymbol{j}^*) \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i} = c_{11} \end{aligned}$$

などが得られる．したがって，$a_1 = c_{11} a_1{}^* + c_{21} a_2{}^* + c_{31} a_3{}^*$ となるが，これは公式 (2) の第 1 式と同じ形である．同様に，a_2, a_3 についても対応する公式を導くことができる．これで右手系に対して定理が証明された．もし $x_1 x_2 x_3$ 座標が左手系ならば $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = +\boldsymbol{i}$ となり，3.11 節の式 (1) の行列式の前に負号がつく．◀

4.2 節

定理 1 (b) の証明　領域 D において連続な F_1, F_2, F_3 をもつ線積分

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) \tag{1}$$

が D で積分路に無関係ならば，ある関数 f に対して $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$，すなわち成分で表して

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{2'}$$

がなりたつことを証明する．

D の中に任意の固定点 $A:(x_0, y_0, z_0)$ および任意の点 $B:(x, y, z)$ を選び，関数 f を

$$f(x, y, z) = f_0 + \int_A^B (F_1\,dx^* + F_2\,dy^* + F_3\,dz^*) \tag{3}$$

によって定義する．ただし，f_0 は任意の定数，また積分路は D において A から B に至る任意の道とする．A は固定されていて積分は道に無関係であるから，この積分は端点 B の座標 x, y, z だけに依存し，それゆえ式 (3) はたしかに D における関数 $f(x, y, z)$ を定義する．この f に対して $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$ を示そう．3 つの関係式 (2′) の第 1 式から出発する．積分路からの独立性を考慮して，まず A から $B_1:(x_1, y, z)$ まで積分し，そのあとで x 軸に平行な線分 B_1B に沿って積分してみる (図 A16)．もちろん，B_1 は全線分 B_1B が D の中にあるように選ぶ．そのとき，

$$f(x, y, z) = f_0 + \int_A^{B_1} (F_1\,dx^* + F_2\,dy^* + F_3\,dz^*) + \int_{B_1}^{B} (F_1\,dx^* + F_2\,dy^* + F_3\,dz^*).$$

ここで両辺の x に関する偏導関数をとろう．左辺は $\partial f/\partial x$ となる．右辺は F_1 を与えることを示そう．$A:(x_0, y_0, z_0)$ と $B_1:(x_1, y, z)$ は x によらないから，第 1 の積分の偏導関数は 0 である．つぎに第 2 の積分を考える．積分 B_1B 上では y, z はいずれも一定なので，$F_2\,dy^*, F_3\,dz^*$ を含む 2 つの項は積分の導関数に寄与しない．残りの項は定積分

$$\int_{B_1}^{B} F_1\,dx^* = \int_{x_1}^{x} F_1(x^*, y, z)\,dx^*$$

として表すことができる．したがって，x に関する偏導関数は $F_1(x, y, z)$ となり，式 (2′) の第 1 式が証明される．ほかの 2 つの式も同じ論法で導かれる．◀

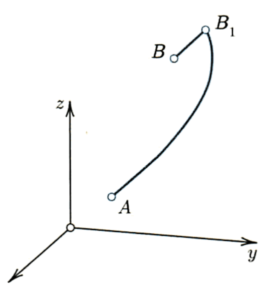


図 A16　定理 1 の証明

付録 5

数表

表 A1　ベッセル関数

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	3.0	−0.2601	0.3391	6.0	0.1506	−0.2767
0.1	0.9975	0.0499	3.1	−0.2921	0.3009	6.1	0.1773	−0.2559
0.2	0.9900	0.0995	3.2	−0.3202	0.2613	6.2	0.2017	−0.2329
0.3	0.9776	0.1483	3.3	−0.3443	0.2207	6.3	0.2238	−0.2081
0.4	0.9604	0.1960	3.4	−0.3643	0.1792	6.4	0.2433	−0.1816
0.5	0.9385	0.2423	3.5	−0.3801	0.1374	6.5	0.2601	−0.1538
0.6	0.9120	0.2867	3.6	−0.3918	0.0955	6.6	0.2740	−0.1250
0.7	0.8812	0.3290	3.7	−0.3992	0.0538	6.7	0.2851	−0.0953
0.8	0.8463	0.3688	3.8	−0.4026	0.0128	6.8	0.2931	−0.0652
0.9	0.8075	0.4059	3.9	−0.4018	−0.0272	6.9	0.2981	−0.0349
1.0	0.7652	0.4401	4.0	−0.3971	−0.0660	7.0	0.3001	−0.0047
1.1	0.7196	0.4709	4.1	−0.3887	−0.1033	7.1	0.2991	0.0252
1.2	0.6711	0.4983	4.2	−0.3766	−0.1386	7.2	0.2951	0.0543
1.3	0.6201	0.5220	4.3	−0.3610	−0.1719	7.3	0.2882	0.0826
1.4	0.5669	0.5419	4.4	−0.3423	−0.2028	7.4	0.2786	0.1096
1.5	0.5118	0.5579	4.5	−0.3205	−0.2311	7.5	0.2663	0.1352
1.6	0.4554	0.5699	4.6	−0.2961	−0.2566	7.6	0.2516	0.1592
1.7	0.3980	0.5778	4.7	−0.2693	−0.2791	7.7	0.2346	0.1813
1.8	0.3400	0.5815	4.8	−0.2404	−0.2985	7.8	0.2154	0.2014
1.9	0.2818	0.5812	4.9	−0.2097	−0.3147	7.9	0.1944	0.2192
2.0	0.2239	0.5767	5.0	−0.1776	−0.3276	8.0	0.1717	0.2346
2.1	0.1666	0.5683	5.1	−0.1443	−0.3371	8.1	0.1475	0.2476
2.2	0.1104	0.5560	5.2	−0.1103	−0.3432	8.2	0.1222	0.2580
2.3	0.0555	0.5399	5.3	−0.0758	−0.3460	8.3	0.0960	0.2657
2.4	0.0025	0.5202	5.4	−0.0412	−0.3453	8.4	0.0692	0.2708
2.5	−0.0484	0.4971	5.5	−0.0068	−0.3414	8.5	0.0419	0.2731
2.6	−0.0968	0.4708	5.6	0.0270	−0.3343	8.6	0.0146	0.2728
2.7	−0.1424	0.4416	5.7	0.0599	−0.3241	8.7	−0.0125	0.2697
2.8	−0.1850	0.4097	5.8	0.0917	−0.3110	8.8	−0.0392	0.2641
2.9	−0.2243	0.3754	5.9	0.1220	−0.2951	8.9	−0.0653	0.2559

$x = 2.405,\ 5.520,\ 8.654,\ 11.792,\ 14.931, \cdots$ に対して $J_0(x) = 0$ である．
$x = 0,\ 3.832,\ 7.016,\ 10.173,\ 13.324, \cdots$ に対して $J_1(x) = 0$ である．

表 A1 ベッセル関数 (つづき)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5.0	−0.309	0.148
0.5	−0.445	−1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	−0.339	−0.024
1.0	0.088	−0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	−0.288	−0.175
1.5	0.382	−0.412	4.0	−0.017	0.398	6.5	−0.173	−0.274
2.0	0.510	−0.107	4.5	−0.195	0.301	7.0	−0.026	−0.303

表 A2 ガンマ関数 (付録 A3.1 の式 (24) 参照)

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1.22	0.913 106	1.42	0.886 356	1.62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0.887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1.74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0.888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1.98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

表 A3 階乗関数

n	$n!$	log $(n!)$	n	$n!$	log $(n!)$	n	$n!$	log $(n!)$
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5 040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

表 A4 誤差関数，正弦積分，余弦積分 (付録 A3.1 の式 (35), (40), (42) 参照)

x	erf x	Si (x)	ci (x)	x	erf x	Si (x)	ci (x)
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	−0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	−0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	−0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	−0.2533
0.8	0.7421	0.7721	−0.1983	2.8	0.9999	1.8321	−0.1865
1.0	0.8427	0.9461	−0.3374	3.0	1.0000	1.8487	−0.1196
1.2	0.9103	1.1080	−0.4205	3.2	1.0000	1.8514	−0.0553
1.4	0.9523	1.2562	−0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	−0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	−0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	−0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410

索　引

あ 行

か 行

さ　行

た 行

な 行

は　行

監訳者・訳者略歴

近藤次郎（こんどう じろう）

1940 年　京都大学理学部数学科卒業
1945 年　東京大学工学部航空学科卒業
1958 年　工学博士
現　在　東京大学名誉教授

堀　素夫（ほり もとお）

1953 年　東京大学理学部物理学科卒業
1962 年　理学博士
現　在　東京工業大学名誉教授

1987年 9 月 30 日　第 5 版発行
2003年 6 月 20 日　第 8 版発行
2012年 2 月 20 日　第8版9刷発行

技術者のための高等数学＝2
線形代数とベクトル解析
原書第 8 版

原著者　E. クライツィグ
訳　者　堀　素夫
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102-8260
電話 (03) 3262-5256 (代表)・振替 00140-7-44725

D.T.P. アベリー・前田印刷・牧製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN 978-4-563-01116-1 C3341